Pendekatan Geometri Differensial dalam Teori Relativitas Umum dan Solusi 2 Soliton Persamaan Medan Einstein Axisimetrik

Tugas Akhir

Diajukan sebagai salah satu syarat untuk meraih gelar Sarjana Sains

Handhika Satrio Ramadhan
0301027012

Departemen Fisika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia
Depok

2005

Lembar Persetujuan

Nama	:	Handhika Satrio Ramadhan
NPM	:	0301027012

Daftar Isi Skripsi ini telah diperiksa dan disetujui

Depok, 18 April 2005

Mengesahkan

Pembimbing I	Pembimbing II
(alm)Hans Jacobus Wospakrik,PhD	Terry Mart,PhD
Penguji I	Penguji II
Dr.Muhammad Hikam	Dr.Anto Sulaksono

Kata Pengantar

Alhamdulillah, segala puji hanya bagi ALLAH Yang Maha Tunggal Yang Tiada Rabb melainkan-Nya, Penguasa semesta alam, atas segala nikmat dan anugerah-Nya hingga penulis mampu menyelesaikan tugas akhir ini. Kepada Dia lah penulis bersandar mengadukan segala kelemahan diri dalam perjuangan memahami, mengerjakan, dan menyelesaikan tema tugas akhir selama satu tahun terakhir. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua dan adikku semata wayang yang telah memberi dukungan penuh secara moril maupun materiil dan memahami kesibukan penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Keinginan untuk mempelajari Teori Relativitas Umum sebenarnya telah muncul sejak penulis berada di bangku kelas II SMU. Semangat penulis pada waktu itu untuk memahami teori ini terbentur pada masalah konsep matematika tingkat tinggi yang harus dikuasai. Bertahun-tahun tertunda, syukurlah sejak tahun lalu keinginan tersebut dapat terealisasi. Berbekal semangat yang tak pernah padam untuk memahami seluruh gagasan besar fisika teoretik dan yang terpenting bantuan serta dukungan dari semua pihak, terutama bimbingan yang tulus dari mendiang Bapak Hans J. Wospakrik, penulis berusaha mempelajari konsep-konsep teori relativitas umum dan geometri diferensial-topologi dari berbagai buku acuan.

Akhirnya, tak lupa penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

mendiang Bapak **Hans Jacobus Wospakrik, PhD** selaku **Pembimbing I** atas bimbingan, perhatian, dan kesabarannya kepada penulis selama ini. Beliaulah guru dan sahabat yang telah memperkenalkan keindahan dan kegunaan geometri diferensial-topologi dalam fisika, serta menumbuhkan lebih dalam kecintaan pada fisika teoretik. Beliau rela mengorbankan waktu akhir pekan dan kepentingan keluarganya hanya untuk membimbing penulis dengan tanpa pamrih. Komunitas fisika teoretik Indonesia amat kehilangan dengan kepergian beliau.

Bapak **Terry Mart, PhD** selaku **Pembimbing II** atas bimbingan, saran, dan nasihat-nasihatnya selama ini. Beliaulah **Pembimbing Akademik** penulis selama menjadi mahasiswa di departemen Fisika UI yang dengan sabar memandu dan membimbing penulis hingga mencapai semua yang telah dicapai saat ini. Petuah-petuah berharganya tak akan pernah penulis lupakan.

Bapak **Dr. Muhammad Hikam** dan Bapak **Dr. Anto Sulaksono** selaku **Penguji** dalam sidang skripsi atas diskusi-diskusi berharganya.

Ibu **Dr.rer.nat. Rosari Saleh** selaku **Ketua Sidang** atas filosofi-filosofi fisika yang diajarkannya selama kuliah-kuliahnya. Kata-kata mutiara yang selalu teringat: *"fisika itu tidak mudah, tetapi fisika itu indah"*.

Ibu **Dr. Djarwani S** selaku Ketua Departemen Fisika UI atas bantuan rekomendasinya dalam masalah permohonan bimbingan.

Bapak **Dr. L.T. Handoko** atas diskusi-diskusinya yang berharga mengenai masa depan karir penulis, juga atas rekomendasi ICTP dan kebaikannya meminjamkan buku-buku dari Lab Teori.

Bapak **Dr. Bobby Eka Gunara** dan Bapak **Dr. Jorga Ibrahim** dari ITB atas kebaikan hatinya menjawab pertanyaan-pertanyaan penulis.

Teman-teman di Lab Teoretik: Irga, Juju, Arum, Freddy, Anton, Ardy, Nita, Parada, Chandy, Pak Sulaiman (terima kasih atas buku Soliton nya) atas kebersamaannya selama ini.

Teman-teman angkatan 2001: Eki, Bowo, Krisna, Sindhu, Hasan, Eko, Iip, Buyung, Tucil, Yopi, Yudo, Keke, Jo, Priyo, Bolly, Willy, Marito, Kris, Justo, Karin, Ibo, Ivo, Esi, Yayan, Siti, dan juga teman-teman semua yang belum sempet kesebut satu-persatu.

Pak Miftachul Hadi (maafin segala kesalahan saya ya, pak), Mas Haryo di Fermilab (atas bantuan paper-paper yang berharga) Reyhan (atas kamar dan ngobrolnya), dan Arma di ITB (temen senasib ditinggal pak Hans, hehehe...).

Prof. Frederick J. Ernst dari **IIT, Illinois** dan **Dr. Aysu karase** dari **METU, Ankara** atas diskusi-diskusi berharganya via e-mail tentang paper

beliau-beliau yang penulis gunakan dalam tugas akhir.
dan semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang telah membantu tersusunnya tugas akhir ini.
Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran amat penulis harapkan demi perkembangan riset fisika teoretik di UI khususnya dan di Indonesia umumnya.

Handhika Satrio Ramadhan

Abstract

General Theory of Relativity is reformulated in terms of Modern Differential Geometry methods. This approach shows that gravitational field is only a manifestation of 4-D Pseudo-Riemann Manifold Curvature. Interestingly, the Einstein's field equation appears naturally from first principle without any empirical assumption. Axiallysymmetric vacuum field equations representing gravitational field outside a rotating star is then considered by applying Ernst's complex potential method to simplify and Zakharov-Belinski's inverse scattering problem of soliton method to solve those non-linear field equations. The solution, namely Lewis-Papapetrou metric, is a metric (or length element) that describes the space-time geometric structure around the rotating star. The soliton method can be used to generate other class of exact solutions in terms of N-soliton solutions.

Keywords: general relativity, modern differential geometry, Ernst's equation, soliton, Zakharov-Belinski's inverse scattering method.

Abstrak

Teori Relativitas Umum diformulasikan ulang dengan menggunakan pendekatan geometri diferensial modern. Pendekatan ini menunjukkan bahwa persamaan medan gravitasi hanyalah merupakan manifestasi kelengkungan manifold pseudo-Riemann 4-D belaka. Menariknya, persamaan medan Einstein dapat diturunkan secara alami dari kaidah pertama tanpa ada asumsi empiris. Selanjutnya ditinjau kasus persamaan medan axisimetrik vakum yang menggambarkan medan gravitasi di sekitar sebuah bintang yang berotasi. Dengan menggunakan metode potensial kompleks Ernst dan metode soliton hamburan balik Zakharov-Belinski, persaman medan non-linear tersebut disederhanakan dan dipecahkan. Solusinya (metrik Lewis-Papapetrou) merupakan metrik (elemen jarak) yang menggambarkan struktur geometri ruang-waktu di sekitar bintang yang berotasi. Metode soliton yang digunakan dapat menggeneralisir jenis-jenis solusi eksak yang lain dalam konteks solusi N soliton.

Kata kunci: teori relativitas umum, geometri diferensial modern, persamaan Ernst, soliton, metode hamburan balik Zakharov-Belinski.

Daftar Isi

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori Relativitas Umum pada dasarnya merupakan suatu kajian terhadap geometri pseudo-Riemann ruang-waktu empat dimensi dan konsekuensinya terhadap fenomena-fenomena fisis [1]. Secara fisis teori ini menyatakan bahwa medan gravitasi adalah suatu konsekuensi dari kelengkungan ruang-waktu, dan sebaliknya pula bahwa bentuk geometri ruang-waktu akan menentukan distribusi materi (*gravitational field source*). Artinya, secara matematis tensor metrik ruang-waktu dan tensor penyebaran materi saling terkopel satu sama lain. Hal ini megakibatkan persamaan medannya - yaitu yang dikenal dengan nama *Persamaan Medan Einstein* - berbentuk persamaan diferensial parsial non-linear, suatu bentuk persamaan diferensial yang sangat sulit dicari solusi analitiknya [2]. Agaknya, itulah sebabnya mengapa gravitasi merupakan interaksi dasar yang paling sulit dikuantisasi dan disatukan bersama tiga interaksi dasar yang lain (elektromagnetik, nuklir kuat, dan nuklir lemah) ke dalam satu persamaan akbar terpadu, *Theory of Everything*, impian para fisikawan sedunia sepanjang abad. Riset dalam bidang Teori Relativitas Umum ini (seperti *Astrofisika*, *Kosmologi*, *Kuantum Gravitasi*, dll) sangat membutuhkan pemahaman akan konsep dan teknik matematika tingkat tinggi. Di Departemen Fisika UI, penulis mencermati belum adanya riset di bidang ini. Oleh karena itu penulis memberanikan diri untuk melakukan penelitian teoretik di bidang Relativitas Umum karena selain memang minat penulis yang besar di bidang ini, juga sebagai studi awal dan rangsangan agar muncul riset di bidang ini.

Persamaan Medan Einstein dalam Teori Relativitas Umum dapat diperoleh dengan beberapa cara, di antaranya dengan metode tensor klasik dimana kita menurunkan tensor Ricci dari simbol Christoffel (*affine connection*) yang didapat dari turunan parsial tensor metrik terhadap variabel-variabelnya, dan metode Lagrangian (*least action principle*) dimana kita mengkonstruksi Lagrangian ruang-waktu dari tensor metrik dan menerapkan persamaan Euler-Lagrange untuk memperoleh persamaan medannya [2]. Namun dalam tugas akhir ini, penulis menggunakan metode yang sedikit berbeda dari metode-metode yang disebutkan di atas. Penulis memformulasikan kembali Teori Relativitas Umum dengan konsep-konsep geometri diferensial modern dengan memperkenalkan ruang-waktu sebagai suatu manifold diferensiabel berdimensi empat dan menggunakan metode intrinsik Elie-Cartan (seperti: $frame$, $form$, *exterior derivative*) untuk mempelajari sifat kelengkungan dan simetri daripada ruang-waktu yang dianalisis [1]. Kemudian akan diperlihatkan bahwa sebenarnya medan gravitasi hanyalah merupakan gejala geometris belaka sebagai manifestasi kelengkungan ruang-waktu pseudo Riemann [1, 3, 4].

1.2 Perumusan Masalah

Problem utama dalam Teori Relativitas Umum adalah mencari solusi metrik ruang-waktu dari Persamaan Medan Einstein yang merupakan persamaan diferensial parsial non-linear (PDP non-linear). Dengan mendapatkan metrik ruang-waktu, maka bentuk geometri ruang-waktu dan persamaan gerak partikel dalam sistem yang kita analisis tersebut akan dapat kita ketahui.
Akibat sifat non-linearitas dari PDP Persamaan Einstein, maka umumnya solusi eksak analitik persamaan tersebut sulit diperoleh. Namun demikian, ada beberapa ruang-waktu yang memiliki simetri-simetri tertentu sehingga dapat diperoleh solusi eksak analitis metrik ruang-waktunya, seperti: metrik Schwarzchild (yang memiliki simetri bola dan statis, merupakan solusi paling awal dari Persamaan Medan Einstein), metrik Reissner-Nordstrom (metrik Schwarzchild bermuatan listrik),metrik Weyl-Levi Civita (yang memiliki simetri silinder dan statis), dan

lain-lain [2].
Salah satu problem yang menarik dalam Teori Relativitas Umum adalah mencari solusi dari persamaan medan Einstein axisimetrik (*axiallysymmetric*), baik vakum maupun bermuatan. Secara fisis, model metrik axisimetrik ini adalah materi masif (bintang) yang berotasi terhadap sumbu rotasinya sehingga menimbulkan medan gravitasi di sekitarnya. Masalah axisimetrik ini menjadi penting karena: pertama, persamaan medan yang dihasilkan oleh kasus ini merupakan persamaan diferensial parsial yang sangat non-linear (*highly non-linear partial differential equation*) yang sangat membutuhkan teknik-teknik khusus dalam menanganinya. Teknik-teknik yang telah dikembangkan (metode *inverse scattering*-transformasi Backlund-Darboux, transformasi Neugebauer, soliton Zakharov-Belinskii, grup Kinnersley-Chitre, struktur prolongasi, metode Cosgrove) merupakan metode-metode yang secara luas dapat pula diterapkan pada persamaan-persamaan non-linear yang lain (persamaan Yang-Mills, non-linear σ model, dll) [6,7,8]. Kedua, problem axisimetrik ini memiliki aplikasi yang cukup luas dalam fisika, mulai dari lubang hitam (*black hole*), pulsar, galaksi berputar, sampai bintang neutron. Kasus axisimetrik inilah yang akan penulis bahas dalam tugas akhir ini [7].

1.3 Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk memperkenalkan aplikasi-aplikasi geometri diferensial modern ke dalam konsep fisika, salah satunya dengan menurunkan Persamaan Medan Einstein dalam Teori Relativitas Umum. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan untuk menentukan metrik ruang-waktu untuk kasus axisimetrik dengan cara menyederhanakan persamaan medannya dengan metode Ernst dan memecahkannya dengan metode *inverse scattering* (hamburan balik) Zakharov-Belinskii.

Bab 2

Manifold Diferensiabel

Geometri diferensial merupakan studi terhadap persoalan-persoalan geometri yang dibahas dengan menggunakan konsep analisis [1]. Secara lebih mendalam, Klein [9] mendefinisikannya sebagai studi sifat-sifat invarian dari manifold diferensiabel terhadap transformasi difeomorfisme. Obyek utama dalam riset geometri diferensial adalah manifold diferensiabel dan berbagai medan tensor di dalamnya. Maka untuk memahami geometri diferensial dan aplikasinya dalam fisika, kita mutlak harus memahami dahulu apa itu manifold diferensiabel.

2.1 Manifold

Secara awam, manifold dapat dibayangkan sebagai generalisasi dari titik, garis, permukaan, dan ruang kontinu berdimensi lebih tinggi lainnya.
Secara formal, himpunan (titik-titik) M didefinisikan sebagai suatu manifold jika setiap titik pada M memiliki lingkungan terbuka (*open neighborhood*) yang dapat dipetakan secara kontinu 1-1 kepada suatu himpunan buka (*open set*) dari bilangan riil R^n [3,9].

2.2 Manifold Diferensiabel

Dapat dikatakan, manifold M berdimensi-n secara lokal 'serupa' dengan R^n. Untuk setiap titik pada M terdapat himpunan buka U yang homeomorfis terhadap himpunan buka V pada R^n. Pemetaan homeomorfis ini diparameterisasikan oleh himpunan fungsi-fungsi yang kontinu. Jika himpunan fungsi-fungsi tersebut diferensiabel (turunan parsial orde ke-∞ eksis, biasa ditulis C^∞), maka manifold tersebut dinamakan *manifold diferensiabel.*

Dengan demikian, manifold M diferensiabel memiliki sifat-sifat:

(i) $\{\bigcup_\alpha\}$ suatu cover-terbuka (*open covering*) pada M.

(ii) ϕ_α suatu homeomorfisme dari U_α pada suatu *open neighborhood* dalam R^n.

(iii) Peta $\phi_\beta\phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\bigcup_\alpha \bigcap \bigcup_\beta) \to \phi_\beta(\bigcup_\alpha \bigcap \bigcup_\beta)$ diferensiabel dengan domain R^n.

(iv) $\{\bigcup_\alpha, \phi_\alpha\}$ adalah maksimal [1,3,9,10].

(2.1)

2.3 Medan Vektor Tangensial dan Medan Form (Cotangensial)

Tinjau sebuah ruang F yang merupakan ruang dari semua fungsi real yang diferensiabel pada M. Jika p $\in M$, maka vektor tangensial pada p merupakan pemetaan riil v pada F dengan sifat-sifat:

(i) v(f+g) = v(f) + v(g) f,g$\in F$

(ii) v(af) = av(f) a$\in$ F

(iii) v(fg) = v(f)g + fv(g)[1]

(2.2)

Semua vektor tangensial pada p membentuk ruang vektor $T_{(p)}(M)$. Vektor tangensial pada p secara eksplisit diberikan oleh:

$$e_i(f) = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \tag{2.3}$$

Dengan demikian, maka kumpulan vektor-vektor tangensial $e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$,...,$e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$ membentuk basis bagi $T_{(p)}(M)$.

Bila v merupakan suatu vektor pada p, maka v dapat dinyatakan terhadap basis e_i sebagai:

$$v = v^i e_i \tag{2.4}$$

dimana v^i merupakan suatu koefisien riil, dan disini serta untuk selanjutnya berlaku konvensi sumasi Einstein. Pemetaan v yang didefinisikan pada setiap $p \in M$ dinamakan medan vektor (*vector field*).

Sebuah 1-form ω pada p didefinisikan sebagai suatu vektor yang memetakan secara linear ruang vektor tangensial $T_{(p)}(M)$ ke bilangan riil R^n. ω^i merupakan basis bagi sebuah ruang vektor $T^*_{(x)}(M)$. Jelaslah bahwa $T^*_{(x)}(M)$ merupakan *dual* bagi ruang vektor $T_{(p)}(M)$ dan ω^i merupakan *dual* bagi basis e_i. Medan 1-form didefinisikan sebagai:

$$\eta = \eta_i \omega^i \tag{2.5}$$

Karena 1-form dan vektor tangensial dual satu sama lain, maka bekerjanya ω^i terhadap e_i memberikan $< \omega^i, e_j > = \delta^i_j$ (*delta kronecker*). Vektor tangensial dan 1-form (vektor cotangensial) masing-masing tidak lain dari vektor kontravarian dan vektor kovarian dalam analisis tensor klasik [1,10].

2.4 Perkalian Tensor

Dari ruang vektor tangensial dan vektor cotangensial, dapat dibentuk suatu perkalian Kartesius (*Cartesian Product*):

$$\prod_s^r = \underbrace{T_{(p)}(M) \times ... \times T_{(p)}(M)}_{r-faktor} \times \underbrace{T^*_{(p)}(M) \times ... \times T^*_{(p)}(M)}_{s-faktor} \tag{2.6}$$

Tinjau suatu pemetaan multilinear $\mathbf{T}$ yang memetakan manifold $\prod_s^r$ ke ruang bilangan riil R^1. Kondisi multilinear mensyaratkan:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\eta^{\mathbf{1}}, ..., \eta^{\mathbf{s}}, \mathbf{v_1}, ...\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}, ..., \mathbf{v_r}) &= \alpha\mathbf{T}(\eta^{\mathbf{1}}, ..., \eta^{\mathbf{s}}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{u}, ..., \mathbf{v_r}) \\ &\quad +\beta\mathbf{T}(\eta^{\mathbf{1}}, ..., \eta^{\mathbf{s}}, \mathbf{v_1}, ..., \mathbf{w}, ..., \mathbf{v_r}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pemetaan multilinear $\mathbf{T}$ tersebut dinamakan tensor tipe (r,s). Kumpulan tensor-tensor pada titik p dalam manifold M membentuk Ruang tensor dan dinamakan *Perkalian Tensor* (*Tensor Product*):

$$T^r_s(M) = \underbrace{T_{(p)}(M) \otimes ... \otimes T_{(p)}(M)}_{r-faktor} \otimes \underbrace{T^*_{(p)}(M) \otimes ... \otimes T^*_{(p)}(M)}_{s-faktor} \tag{2.8}$$

Unsur-unsur dari perkalian tensor, yaitu: $T^r_0(M)$ disebut tensor kontravarian, dan T^0_s disebut tensor kovarian. Jelas bahwa $T^1_0(M) = T_{(p)}(M)$ dan $T^0_1(M) = T^*_{(p)}(M)$ [1,3,10].

2.5 Kalkulus Forms

Kalkulus forms pertama kali dikembangkan oleh E. Cartan di awal abad 20, dan menjadi salah satu metode analitik paling ampuh dalam geometri diferensial. Metode ini mampu memadukan dan menyatukan berbagai macam konsep dalam fisika matematika, sebut saja: teori integrasi manifold, *cross-product*, divergensi dan curl pada geometri Euclid 3-dimensi, orientasi arah manifold, Teorema Stokes dan Gauss, dan syarat integrabilitas dari sistem persaman diferensial parsial [3,11]. Dalam tugas akhir ini hanya akan dibahas sebagian kecil saja dari konsep form ini dan peranannya dalam relativitas umum.

2.5.1 Perkalian Luar (*Exterior Product*)

Dari analisis tensor di atas, salah satu kelas tensor yang ada adalah tensor tipe (0,s) antisimetrik total (tensor kovarian antisimetrik total). Sifat antisimetrisitas mensyaratkan $\mathbf{T}(\eta^{\mathbf{1}}, .., \eta^{\mathbf{i}}, \eta^{\mathbf{j}}, ..., \eta^{\mathbf{s}})$ = - $\mathbf{T}(\eta^{\mathbf{1}}, ..., \eta^{\mathbf{j}}, \eta^{\mathbf{i}}, ..., \eta^{\mathbf{s}})$.
Tensor-tensor antisimetrik ini membentuk suatu ruang tensor antisimetrik dengan basis-basisnya merupakan perkalian tensor antisimetrik yang didefinisikan:

$$\omega^i \wedge ... \wedge \omega^j = \delta^{i...j}_{k...l} \omega^k \otimes ... \otimes \omega^l \tag{2.9}$$

dimana $\delta^{i...j}_{k...l}$ merupakan simbol delta kronecker diperumum.
Produk tensor antisimetris dalam persamaan (2.9) di atas dinamakan perkalian luar (*exterior product*) atau *wedge product*. *Wedge product* merupakan perkalian antisimetris dari kovarian tensor. Sebagai contoh, untuk 1-form (tensor kovarian orde 1) η dan π, maka $\eta \wedge \pi$ = -$\pi \wedge \eta$.
Dengan demikian, maka suatu p-form (tensor kovarian antisimetris orde-p) dapat dinyatakan dalam basisnya sebagai:

$$\eta = \frac{1}{p!} \eta_{i_1 ... i_p} \omega^{i_1} \wedge ... \wedge \omega^{i_p} \tag{2.10}$$

Untuk setiap p-form η, π, γ, dan q-form β operasi wedge product memenuhi sifat-sifat:
(i) Asosiatif $(\eta \wedge \pi) \wedge \gamma = \eta \wedge (\pi \wedge \gamma)$
(ii) Distributif $(\eta + \pi) \wedge \gamma = \eta \wedge \gamma + \pi \wedge \gamma$

(iii) Skew-komutatif $\eta \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \eta$ [3,9,11]

$$(2.11)$$

2.5.2 Diferensial Luar (*Exterior Derivative*)

Pada manifold M, didefinisikan suatu operator d yang memetakan secara linear p-forms ke $(p+1)$-forms. Operator ini dinamakan operator diferensial luar (*exterior derivative*):

$$d\eta = \frac{1}{p!} d(\eta_{i_1 \ldots i_p}) \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p} \tag{2.12}$$

dengan $d(\eta_{i_1 \ldots i_p})$ merupakan suatu *differensial-forms.*
Operator diferensial luar memenuhi sifat-sifat:
(i) Jika f fungsi skalar (0-form), maka operator d mengubah f menjadi 1-form

$$df = \tfrac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$$

(ii) Jika η dan β merupakan p-forms, maka $d(\eta + \beta)$=$d\eta + d\beta$
(iii) Jika η p-forms dan β q-forms, maka $d(\eta \wedge \beta)$=$d\eta \wedge \beta + (-1)^p \eta \wedge d\beta$
(iv) Lemma Poincare, $d(d\eta)$=0.

$$(2.13)$$

Suatu p-forms η yang memenuhi kondisi d$\eta = 0$ disebut tertutup (*closed*), sedangkan bila $\eta = d\pi$ (dengan π merupakan $(p-1)$-forms) dikatakan eksak (*exact*). Dengan demikian Lemma Poincare pada sifat (iv) menyatakan bahwa suatu p-forms yang eksak selalu *closed*, tetapi inverse dari lemma ini (suatu p-forms yang *closed* dapat dinyatakan sebagai bentuk eksak dari $(p-1)$-forms) belum tentu berlaku secara global. Studi topologi yang mengkaji hubungan *closed-exact* ini dinamakan *DeRham Cohomology* [3].

Bab 3

Ruang Affin

Tinjau ruang-ruang vektor tangensial pada manifold diferensiabel M. Vektor-vektor tangensial pada titik-titik yang berbeda dalam manifold tidak dapat dioperasikan dan diperbandingkan satu sama lain karena mereka berada dalam ruang vektor yang berbeda. Maka agar pengoperasian dan perbandingan dapat dilakukan, diperlukan suatu struktur koneksi antara vektor-vektor tersebut. Koneksi inilah yang dinamakan Koneksi Affin. Semua koneksi-koneksi affin pada manifold M membentuk Ruang Affin, dan manifold M tersebut dinamakan Manifold Koneksi Affin (*Affine Connection Manifold*) [1,9].

3.1 Vektor Pergeseran (*Displacement Vector*)

Andaikan v adalah suatu vektor tangensial yang dinyatakan terhadap basis-basisnya:

$$v = v^i e_i \tag{3.1}$$

atau dalam koordinat lokal dapat ditulis:

$$v = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.2}$$

maka bekerjanya operator *exterior derivative* d pada v merupakan perubahan infinitesimal dari v, dan dituliskan:

$$dv = dv_x \frac{\partial}{\partial x} + dv_y \frac{\partial}{\partial y} + dv_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{3.3}$$

atau secara global:

$$dv = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \tag{3.4}$$

$$dv = \omega^a e_a \tag{3.5}$$

dimana ω^i merupakan *dual* dari e_i. Walaupun diturunkan dari salah satu koordinat lokal, secara umum persamaan (3.5) ini bersifat intrinsik (independen terhadap pemilihan koordinat lokal).
Jika pers.(3.5) ini didiferensialkan luar sekali lagi:

$$d^2v = d\omega^a e_a - \omega^a de_a \tag{3.6}$$

Timbul pertanyaan apa arti geometris dan fisis dari de_a? Karena e_a merupakan basis bagi vektor tangensial, maka analog dengan persamaan (3.5) dapat dibentuk:

$$de_a = \omega^b{}_a e_b \tag{3.7}$$

dimana $\omega^b{}_a$ merupakan 1-form yang dinamakan koneksi 1-form. Lebih lanjut, $\omega^b{}_a$ dapat dinyatakan dalam basis-basis form nya:

$$\omega^b{}_a = \omega^b{}_{ac}\omega^c \tag{3.8}$$

Dalam koordinat lokal, ω^c dapat dinyatakan sebagai dx^c dan $\omega^b{}_{ac}$ sebagai Γ^b_{ac} sehingga

$$\omega^b{}_a = \Gamma^b_{ac} dx^c \tag{3.9}$$

Γ^b_{ac} inilah yang dinamakan koefisien koneksi affin yang merupakan generalisasi dari simbol Christoffel dalam analisis tensor klasik.

3.2 Persamaan Struktur Cartan

Tinjau kembali persamaan (3.6). Dengan memasukkan hasil persamaan (3.7) ke (3.6) akan diperoleh:

$$\begin{aligned} d^2v &= d\omega^a e_a - \omega^a \wedge \omega^b{}_a e_b \\ &= d\omega^a e_a - \omega^b \wedge \omega^a{}_b e_a \\ &= (d\omega^a - \omega^b \wedge \omega^a{}_b) e_a \\ &\equiv \mathrm{T^a} e_a \end{aligned} \tag{3.10}$$

dimana

$$\mathrm{T^a} = d\omega^a - \omega^b \wedge \omega^a{}_b \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) ini dinamakan *Persamaan Struktur Cartan I*, dan

$$\mathrm{T^a} = \frac{1}{2!}\mathrm{T^a_{bc}}\omega^b \wedge \omega^c \tag{3.12}$$

dinamakan Torsi 2-form (2-*form Torsion*).
Dalam koordinat lokal, Torsi 2-form dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \mathrm{T^a} &= d(dx^a) + dx^b \wedge \Gamma^a_{bc} dx^c \\ &= \Gamma^a_{bc} dx^b \wedge dx^c \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}) dx^b \wedge dx^c \end{aligned} \tag{3.13}$$

Bila persamaan (3.12) dan (3.13) dibandingkan, maka didapat

$$\mathrm{T^a_{bc}} = \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb} \tag{3.14}$$

Bila $\mathrm{T^a}$=0, maka koefisien koneksi affin akan simetris

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb} \tag{3.15}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa simbol Christoffel tidak lain dari koefisien koneksi affin yang simetris.
Jika persamaan (3.7) didiferensialkan luar sekali lagi, diperoleh

$$\begin{aligned} d^2 e_a &= d\omega^b{}_{\cdot a} e_b - \omega^b{}_a \wedge de_b \\ &= d\omega^b{}_a e_b - \omega^b{}_a \wedge \omega^c{}_b e_c \\ &= d\omega^b{}_a e_b - \omega^c{}_a \wedge \omega^b{}_c e_b \\ &\equiv R^b{}_a e_b \end{aligned} \tag{3.16}$$

dengan

$$R^b{}_a = d\omega^b{}_a - \omega^c{}_a \wedge \omega^b{}_c \tag{3.17}$$

Persamaan (3.17) dinamakan *Persamaan Struktur Cartan II*, dan

$$R^b{}_a = \frac{1}{2!} R^b{}_{adc} \omega^d \wedge \omega^c \tag{3.18}$$

dinamakan Kelengkungan Riemann 2-form (2-*form Riemann Curvature*). $R^b{}_{adc}$ dinamakan *Tensor Riemann*.

Dalam koordinat lokal, 2-form Kelengkungan Riemann dapat dituliskan:

$$\begin{aligned}
R^b_a &= d(\Gamma^b_{ac}dx^c) + \Gamma^c_{ae}dx^e \wedge \Gamma^b_{cf}dx^f \\
&= d\Gamma^b_{ac} \wedge dx^c + \Gamma^c_{ae}\Gamma^b_{cf}dx^e \wedge dx^f \\
&= \frac{\partial\Gamma^b_{ac}}{dx^e}dx^e \wedge dx^c + \Gamma^f_{ae}\Gamma^b_{cf}dx^e \wedge dx^c \\
&= (\frac{\partial\Gamma^b_{ac}}{dx^e} - \frac{\partial\Gamma^b_{ae}}{dx^c} + \Gamma^f_{ae}\Gamma^b_{cf} - \Gamma^f_{ac}\Gamma^b_{ef})dx^e \wedge dx^c \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, maka Tensor Riemann dapat dituliskan:

$$R^b_{adc} = \frac{\partial\Gamma^b_{ac}}{dx^e} - \frac{\partial\Gamma^b_{ae}}{dx^c} + \Gamma^f_{ae}\Gamma^b_{cf} - \Gamma^f_{ac}\Gamma^b_{ef} \qquad (3.20)$$

Persamaan (3.20) ini persis sama dengan hasil penurunan Tensor Riemann dengan metode analisis tensor klasik [2].

3.3 Turunan Kovarian (*Covariant Derivative*)

Tinjau persamaan (3.13). Jika manifold M memiliki kneksi affin yang simetris (T^{a}=0), maka

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega^a{}_b \qquad (3.21)$$

Dengan demikian, bila η merupakan 1-form pada manifold M, η=$\eta_i\omega^i$, maka diferensial luarnya diberikan oleh persamaan:

$$d\eta = D\eta_i \wedge \omega^i \qquad (3.22)$$

dimana

$$D\eta_i = d\eta_i - \eta_i\omega^j{}_i \qquad (3.23)$$

disebut Turunan Kovarian (*Covariant Derivative*) untuk 1-form [1].

Dengan cara yang sama dapat pula dibentuk Turunan Kontravarian dari vektor tangensial $v = v^ie_i$ pada manifold M, yaitu:

$$dv = Dv^i \wedge e_i \qquad (3.24)$$

dengan

$$Dv^i = dv^i + v^j\omega^i{}_j \qquad (3.25)$$

Dalam analisis tensor klasik dan pemilihan koordinat lokal, turunan kovarian dituliskan

$$\nabla_\alpha V_\beta = \frac{\partial V_\beta}{dx^\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} V_\lambda \tag{3.26}$$

Sekarang tinjau persamaan (3.18) dan (3.20). Jelas bahwa $R^b{}_a$ merupakan sebuah tensor 2-form. Tetapi muncul pertanyaan: apa arti geometris dari $R^b{}_{\cdot a}$? Untuk menjawabnya, ada baiknya jika kita mengkaji dahulu konsep kelengkungan.

Secara intuitif, kita biasa mendefinisikan kelengkungan (*curvature*) sebagai permukaan $2-D$ yang tertekuk (*embedded*) dalam ruang $3-D$. Sayangnya, pengertian ini tidak mencukupi ketika berhadapan dengan konsep manifold yang merupakan bentuk umum dan abstrak dari permukaan. Oleh karena itu, dibutuhkan definisi kelengkungan yang lebih luas dan independen terhadap dimensi dan koordinat.

Tinjau dua buah titik A dan B yang berbeda (tidak berimpit) pada manifold M. Lintasan terpendek yang dapat ditempuh dari A ke B dinamakan *geodesik*. Bila manifold yang ditinjau berupa ruang datar, maka geodesiknya berupa garis lurus. Pada ruang datar ini, dua buah garis lurus yang sejajar (paralel) tidak akan pernah berpotongan satu sama lain. Hal ini tidak berlaku pada ruang lengkung. Dua buah garis yang sejajar dapat berpotongan, atau bahkan tidak ada sama sekali dua garis yang dapat sejajar. Ini adalah inti dari konsep Geometri Ruang Lengkung (Geometri non-Euclid) yang dikembangkan oleh Gauss, Lobachevsky, Boylai, dan Riemann [12].

Dengan demikan, maka kita dapat mendefinisikan kelengkungan sebagai 'kegagalan' geodesik yang paralel untuk tetap paralel [13]. Disini kelengkungan didefinisikan dalam konteks transpor paralel sepanjang kurva tertutup (*closed path*) dalam manifold. Operator turunan kovarian yang dikerjakan pada suatu 1-form dari suatu titik p pada kurva tertutup c pada manifold mendefinisikan vektor transpor paralel pada kurva tersebut. Maka, dapatlah didefinisikan suatu tensor yang mengukur kelengkungan kurva pada manifold sebagai suatu 'kegagalan' dari operator turunan kovarian untuk bersifat komutatif ketika dikerjakan pada 1-form [13].

Jika operator turunan kovarian dikerjakan dua kali dan dikomutatifkan kepada suatu 1-form dan dituliskan dalam koordinat lokal, maka berdasarkan persamaan (3.26) kita akan dapatkan [2]

$$(\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) V_\alpha = \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\alpha\gamma}}{dx^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\alpha\beta}}{dx^\gamma} + \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \Gamma^\rho_{\beta\delta} - \Gamma^\delta_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\gamma\delta} \right) V_\rho \tag{3.27}$$

Bagian dalam kurung pada ruas kanan tidak lain adalah Tensor Kelengkungan Riemann. Dengan demikian, kita memiliki justifikasi mengapa persamaan (3.20) dinamakan Tensor Kelengkungan Riemann, yaitu karena ia mengukur seberapa besar ruang manifoldnya melengkung.

3.4 Identitas Bianchi

Tinjau kembali Persamaan Struktur Cartan II (3.17). Jika dikerjakan operator diferensial luar pada persamaan tersebut, maka akan diperoleh suatu identitas:

$$dR^i{}_j = \omega^i{}_k \wedge R^k{}_j - R^i{}_m \wedge \omega^m{}_j \tag{3.28}$$

yang dinamakan Identitas Bianchi (*Bianchi Identity*).

Agar dapat melihat lebih jelas mengapa persamaan di atas dinamakan sebagai suatu identitas, maka ruas kiri persamaan tersebut dapat dituliskan dengan menggunakan definisi turunan kovarian yang diperumum untuk tensor sebagai:

$$\begin{aligned} dR^i{}_j &= \frac{1}{2!} DR^i{}_{jkl} \wedge \omega^k \wedge \omega^l \\ &= \frac{1}{2!} (dR^i{}_{jkl} - R^i{}_{jml} \omega^m{}_k - R^i{}_{jkn} \omega^n{}_l) \wedge \omega^k \wedge \omega^l \end{aligned} \tag{3.29}$$

Substitusikan hasil yang didapat ke persamaan (3.28) dan dengan sedikit manipulasi index akan kita peroleh:

$$\frac{1}{2!} (dR^i{}_{jkl} + R^m{}_{jkl} \omega^i{}_m - R^i{}_{mkl} \omega^m{}_j - R^i{}_{jml} \omega^m{}_k - R^i{}_{jkm} \omega^m{}_l) \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0 \tag{3.30}$$

Disini dapat terlihat mengapa persamaan (3.28) merupakan suatu identitas.

Dengan memanipulasi index dan memilih koordinat lokal, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{1}{3!} (R^i_{jkl;m} + R^i_{jmk;l} + R^i_{jlm;k}) dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m = 0 \tag{3.31}$$

atau

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jmk;l} + R^i_{jlm;k} = 0 \tag{3.32}$$

dimana titik koma di depan index menyatakan turunan kovarian terhadap index tersebut.

Persamaan terakhir ini tiada lain pernyataan dari Identitas Bianchi secara analisis tensor klasik.

Bab 4

Manifold Riemann

Sampai saat ini kita belum mendefinisikan "jarak" (*distance*) pada manifold. Pada dasarnya, manifold memang merupakan konsep geometri diferensial yang "primitif" sehingga tidak memperhitungkan jarak. Pemetaan kontinu yang disyaratkan oleh definisi manifold tidak memperhitungkan kekekalan jarak, sudut, ataupun besaran geometri Euclid lainnya. Ia hanya mensyaratkan adanya pemetaan 1-1 yang kontinu, tidak lebih. Pada bab ini kita akan mendefinisikan konsep metrik sebagai generalisasi dari konsep jarak pada manifold.
Ruang affin yang memiliki koefisien-koefisien affin yang simetris sehingga memungkinkan diperkenalkannya suatu produk skalar antara dua vektor yang darinya dapat didefinisikan tensor metrik $g_{\mu\nu}$ sebagai besaran untuk mengukur "jarak" sebagai nilai skalar tersebut dinamakan *Ruang Riemann* atau *Manifold Riemann* (*Riemannian Manifold*) [1,9].

4.1 Metrik Riemann

Himpunan G dikatakan suatu ruang metrik jika untuk setiap pasangan a,b $\in$ G, terdapat pemetaan yang memetakan produk (a,b) ke suatu fungsi riil ρ(a,b) dengan sifat-sifat:

(i) $\rho(a,b)\geq 0 \ \forall a,b \in R$

(ii) $\rho(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$

(iii) $\rho(a,b)=\rho(b,a) \ \forall a,b \in R$

(iv) $\rho(a,c)\leq \rho(a,b)+\rho(b,c) \ \forall \ a,b,c \in R$

(4.1)

Salah satu fungsi yang memenuhi sifat-sifat di atas ialah ρ(a,b)= $\mid a-b \mid$ yang merupakan definisi jarak. Jadi, metrik merupakan konsep jarak yang diperumum. Dengan sifat simetrisitas kefisien koneksi affin, maka pada ruang vektor tangensial $\mathrm{T}^1{}_0(M)$ dapat didefinisikan suatu produk skalar $<,>$yang simetris dan merupakan suatu pemetaan diferensiabel ke bilangan riil. Maka, jika v dan w adalah dua buah vektor pada $\mathrm{T}^1{}_0(M)$, maka $< v, w >$ mendefinisikan suatu fungsi diferensiabel yang memenuhi sifat-sifat:

(i) $< v+u, w > = < v, w > + < u, w >$ $\forall$u,v,w$\in \mathrm{T}^1{}_0(M)$

(ii) $< fv, gw >$=fg$< v, w >$ $\forall$f,g$\in F(M)$

(iii) d$< v, w > = < dv, w > + < v, dw >$

$$\tag{4.2}$$

Dengan demikian, didefinisikan panjang dari suatu vektor sebagai $|v|$ sebagai $|v|$=$(< v, w >)^{1/2}$. Maka dari suatu kurva s pada M, dapat didefinisikan panjang berdasarkan vektor tangensialnya. Jika $s(t)$ merupakan sebuah kurva dengan parameter t dan vektor tangensial v=$\frac{ds}{dt}$=$\frac{dp}{dt}$ dimana dp merupakan vektor pergeserannya, maka:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left\langle \frac{dp}{dt}, \frac{dp}{dt} \right\rangle \\ &= < e_\mu, e_\nu > \frac{\omega^\mu}{dt}\frac{\omega^\nu}{dt} \end{aligned} \tag{4.3}$$

maka:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu \tag{4.4}$$

dimana $g_{\mu\nu} \equiv < e_\mu, e_\nu >$ disebut sebagai tensor metrik dan ds^2 dinamakan jarak infinitesimal antara dua buah titik pada kurva s. Suatu manifold diferensiabel M yang memiliki tensor metrik dinamakan Manifold Riemann sedangkan ds dikatakan metrik dari M. Dengan suatu proses orthogonalisasi, dapat dipilih suatu *frame* (kerangka) e_μ sehingga $< e_\mu, e_\nu >=\delta^\mu_\nu$. Frame seperti ini dinamakan *frame* orthonormal.

Dari tensor metrik kovarian $g_{\mu\nu}$, dapat dibentuk tensor metrik kontravariannya $g^{\mu\nu}$ melalui hubungan

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{4.5}$$

Kedua tensor metrik tersebut dapat digunakan untuk menaikan dan menurunkan index suatu tensor

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\mathrm{T}^{\nu}_{\rho} \tag{4.6}$$

$$\mathrm{T}_{\rho\delta} = g_{\nu\delta}\mathrm{T}^{\nu}_{\rho} \tag{4.7}$$

Manifold Riemann merupakan generalisasi dari manifold Euclid (ruang datar) dan manifold Minkowski (ruang-waktu datar). Artinya, pada manifold Riemann, mungkin saja ruang (atau ruang-waktu) melengkung. Pada manifold datar (Euclid dan Minkowski), tensor metriknya memiliki bentuk khusus $\eta_{\mu\nu}$ dimana *eigenvalue* nya konstan [1,2,9].

4.2 Persamaan Geodesik

Pada subbab III.3 kita telah mendefinisikan secara intuitif konsep geodesik. Pada subbab ini akan coba diberikan definisi yang lebih kuantitatif tentang geodesik. Secara intuitif, geodesik didefinisikan sebagai lintasan terpendek antara dua titik yang dapat ditempuh dari suatu kurva pada manifold. Artinya, kita sama saja mensyaratkan bahwa geodesik haruslah merupakan suatu kurva dengan kelengkungan seminimal mungkin. Secara kalkulus, ini berarti bahwa kurva tersebut memiliki gradien yang sejajar terhadap kurva itu sendiri. Dengan demikian, secara geometri diferensial geodesik didefinisikan sebagai suatu kurva pada manifold yang vektor tangensialnya paralel.
Jika $\sigma(t)$ suatu kurva pada manifold M, maka $\sigma(t)$ dikatakan suatu geodesik jika vektor tangensialnya $\sigma^{'}(t)$=$\frac{d\sigma}{dt}$ paralel, atau

$$\frac{d\sigma^{'}}{dt} = 0 \tag{4.8}$$

Bila $\sigma^{'}(t)$ ditulis sebagai v=$v^i e_i$ dengan v^i=$\frac{dx^i}{dt}$, maka dengan menggunakan konsep turunan kovarian, persamaan di atas dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{4.9}$$

atau jika disubstitusi v^i=$\frac{dx^j}{dt}$, maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{4.10}$$

Persamaan inilah yang dinamakan *Persamaan Geodesik*. Secara geometris, persamaan ini menggambarkan persamaan garis terpendek yang menghubungkan dua buah titik yang berbeda dalam Manifold Riemann.

4.3 Manifold Pseudo-Riemann

Bila *eigenvalue* dari tensor metrik $g_{\mu\nu}$ tidak semuanya positif, maka manifold Riemann tersebut dinamakan *Manifold Pseudo-Riemann*. Bila manifold pseudo-Riemann tersebut berdimensi-n dan memiliki m *eigenvalue* yang negatif, maka manifold tersebut dilambangkan dengan simbol M^n_m.

Dalam manifold pseudo-Riemann, jika s merupakan geodesiknya, maka ia berupa:

(I) *timelike* jika $ds^2 < 0$

(ii) *spacelike* jika $ds^2 > 0$

(iii) *null* jika $ds^2 = 0$

(4.11)

4.4 *Hodge Duality*

Pada manifold Riemann berdimensi-n, dapat didefinisikan suatu operator *dual* p-forms yang memetakan secara linear p-forms ke $(n-p)$-forms. Operator inilah yang dinamakan *Operator Hodge* dan diberi notasi(*). Jika π adalah sebuah p-forms $\pi{=}\frac{1}{p!}\pi_{a_1...a_p}\omega^{a_1} \wedge ... \wedge \omega^{a_p}$, maka *dual* (Hodge) nya adalah:

$$^*\pi = \frac{1}{p!(n-p)!}\sqrt{g}\ \pi^{a_1...a_p}\epsilon_{a_1...a_pb_1...b_{(n-p)}}\omega^{b_1} \wedge ... \wedge \omega^{b_{(n-p)}} \tag{4.12}$$

dimana $\pi^{a_1...a_p}{=}g^{a_1c_1}...g^{a_pc_1}\pi_{c_1...c_p}$ dan $\epsilon_{a_1...a_pb_1...b_{(n-p)}}$ adalah tensor Levi-Civita.

Operator Hodge (*dual p-forms*) ini memenuhi sifat-sifat:

(i) $^{**}\omega{=}(-1)^{np+p+s}\omega$

(ii) $\omega \wedge^* \pi{=}\pi \wedge^* \omega$

dengan s adalah eigenvalue negatif dari tensor metriknya.

4.5 Turunan Hodge (Operator Co-Diferensial)

Dengan mengkombinasikan operator Hodge dan operator diferensial luar, maka pada manifold Riemann dapat didefinisikan suatu operator δ yang memetakan

p-forms ke $(p-1)$-forms sebagai berikut:

$$\delta = (-1)^{np+n+s+1} * d* \tag{4.13}$$

sehingga jika π adalah sebuah p-forms, maka:

$$\delta\pi = \frac{(-1)^{np+n+s+1}}{p!(p-1)!}\pi^{a_p}_{a_1 \ldots a_{p-1};a_p}\,\omega^{a_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{a_{p-1}} \tag{4.14}$$

Dapat dibuktikan bahwa operator Hodge diferensial ini merupakan bentuk umum dari operator divergensi dalam analisis vektor $3-D$.

Turunan Hodge memenuhi sifat-sifat:

(i) δ^2=0

(ii) $^*\delta d$=$\delta^* d$

(iii) $^*d\delta$=δd^*

Bab 5

Teori Relativitas Umum (Geometrodinamika)

Setelah selesai membahas geometri diferensial sebagai metode matematika dalam membangun Teori Relativitas Umum, kini saatnya kita membahas teori gravitasi Einstein tersebut. Pada bab ini akan dipaparkan prinsip-prinsip yang melatar belakangi lahirnya Teori Relativitas Umum dan akan disimpulkan bahwa teori tersebut sebenarnya merupakan studi geometri manifold ruang-waktu pseudo-Riemann berdimensi empat dan pengaruhnya terhadap fenomena-fenomena fisis. Teori Relativitas Umum juga sering disebut sebagai Geometrodinamika karena teori tersebut memformulasikan keterkaitan (kopling) antara bentuk kurva ruang-waktu (geometri) dengan gravitasi dan distribusi materi (dinamika).

5.1 Prinsip Equivalensi

Ketika Newton merumuskan Hukum Gerak dan Hukum Gravitasi nya, ia mendefinisikan dua jenis massa, massa inersial dan massa gravitasi. Massa inersial diukur berdasarkan ukuran kelembaman suatu benda terhadap gaya dorong atau tarik yang bekerja, sedangkan massa gravitasi diukur berdasarkan pengaruh gaya gravitasi pada benda tersebut. Para eksperimentalis semenjak zaman Newton hingga pertengahan abad ke-20 telah berusaha membuktikan kesetaraan antara kedua jenis massa tersebut. Salah satu percobaan yang terkenal ialah percobaan Eotvos yang membuktikan bahwa kedua massa tersebut setara dengan tingkat akurasi

hingga orde 10^{-9}.
Berdasarkan bukti-bukti eksperimen tersebut, akhirnya Eisntein menyimpulkan dalam postulatnya yang terkenal dengan nama Prinsip Equivalensi Massa bahwa "Gaya gravitasi dan gaya inersial yang bekerja pada suatu benda adalah sama (equivalen) dan tak terbedakan (*indistinguishable*) satu sama lain". Konsekuensi dari prinsip ini ialah bahwa tidak ada lagi kerangka acuan inersial. Dengan demikian, maka konsep percepatan yang diperkenalkan pada fisika Newtonian tidak lagi absolut [2].

5.2 Prinsip Kovarian Umum

Akibat prinsip equivalensi massa yang menyebabkan tidak adanya kerangka acuan inersial, maka prinsip Relativitas Khusus yang menyatakan bahwa hukum-hukum fisika berlaku sama pada kerangka acuan inersial tidaklah berlaku umum. Oleh karena itu, Einstein merumuskan postulat keduanya yang terkenal dengan nama Prinsip Kovarian Umum (*General Covariance Principle*) yang menyatakan bahwa "Semua hukum-hukum fisika berlaku sama pada semua kerangka acuan tanpa kecuali".
Konsekuensi dari prinsip ini ialah bahwa setiap besaran fisika haruslah dinyatakan dalam bentuk yang umum dan tidak tergantung koordinat dimana ia didefinisikan. Artinya, semua besaran fisika haruslah ternyatakan dalam bentuk tensor.
Dalam Teori Relativitas Khusus, hukum-hukum gerak dinyatakan dalam bentuk yang invarian terhadap transformasi Lorentz dengan konsekuensi diperkenalkannya konsep ruang-waktu dimensi 4 dengan metrik Minkowski . Sebagai generalisasi dari teori tersebut, maka Teori Relativitas Umum menyatakan bahwa hukum-hukum fisika haruslah invarian terhadap transformasi umum dengan konsep ruang-waktu 4-dimensi yang diperumum. Maka, dapatlah disimpulkan bahwa pada Teori Relativitas Umum, ruang-waktu membentuk suatu manifold diferensiabel, yaitu manifold pseudo-Riemann 4-dimensi M_1^4 dengan metrik yang diperumum (metrik Riemann) [1,2,6]. Berdasarkan Prinsip Equivalensi, dapat pula disimpulkan bahwa medan gravitasi equivalen dengan manifold pseudo-Riemann

M_1^4. Dari dua pernyataan terakhir dapat dilihat bahwa sebenarnya ruang-waktu dan medan gravitasi (dan juga distribusi materi sebagai sumbernya) adalah setara atau saling terkopel satu sama lain.

5.3 Persamaan Medan Einstein

Tinjau kembali Identitas Bianchi pada persamaan (3.32). Dengan menggunakan bentuk eksplisit operator turunan kovarian, persaman tersebut dapat ditulis

$$\nabla_m R^i_{jkl} + \nabla_l R^i_{jmk} + \nabla_k R^i_{jlm} = 0 \tag{5.1}$$

Dengan mengkontraksi indeks i dan k, persamaan di atas dapat dituliskan

$$\nabla_m R_{jl} + \nabla_l R_{jm} + \nabla_i R^i_{jlm} = 0 \tag{5.2}$$

dimana $R_{\mu\nu}$ dinamakan Tensor Ricci kovarian. Jika dikontraksikan lagi indeks j dengan l akan didapatkan

$$-\nabla_m R + \nabla_l R^l_m + \nabla_i R^i_m = 0 \tag{5.3}$$

dimana R suatu besaran skalar kelengkungan yang dinamakan *Ricci Skalar* atau *Kelengkungan Gauss*. Persamaan terakhir ini dapat ditulis sebagai

$$\nabla_\mu \left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R \right) = 0 \tag{5.4}$$

Dari postulat kedua Einstein, semua hukum fisika haruslah sama dalam semua kerangka acuan. Artinya, semua hukum fisika haruslah invarian terhadap transformasi koordinat, atau dalam bahasa geometri diferensial: invarian terhadap transpor paralel. Akibatnya, energi dan momentum sistem haruslah kekal, sehingga dapat dituliskan:

$$\nabla_\mu \mathrm{T}^\mu_\nu = 0 \tag{5.5}$$

dimana T^μ_ν adalah tensor energi-momentum, suatu bentuk kovarian dari energi dan momentum sistem.

Dengan demikian dua persamaan terakhir ini dapat dibandingkan dan diperoleh

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = \kappa \mathrm{T}^\mu_\nu \tag{5.6}$$

dimana κ merupakan suatu konstanta kopling yang harganya dapat ditentukan dari syarat batas, yaitu sebesar:

$$\kappa = \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) \tag{5.7}$$

atau biasa ditulis κ=8π jika digunakan satuan alami (*natural unit*) dimana G=c=1. Persamaan (5.6) biasa ditulis dalam bentuk kovariannya yaitu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa \mathrm{T}_{\mu\nu} \tag{5.8}$$

Persamaan (5.6) dan (5.8) inilah yang dinamakan sebagai *Persamaan Medan Einstein*. Ruas kiri merepresentasikan geometri ruang-waktu sistem, sedangkan ruas kanan berupa distribusi materi pada sistem [2,9,10].

Bab 6

Persamaan Medan Gravitasi Axisimetrik Vakum

Sampai saat ini, kita telah menurunkan dan membahas Teori Relativitas Umum dengan pendekatan geometri diferensial modern. Di bab ini dan selanjutnya, kita akan mencari solusi dari persamaan medan Einstein untuk kasus axisimatrik (*axiallysymmetric*) vakum. Yang dimaksud dengan solusi persamaan medan Einstein ialah mencari bentuk tensor metrik $g_{\mu\nu}$ sebagai solusi persamaan diferensial parsial non-linear medan Einstein.

6.1 Metrik Lewis-Papapetrou

Persamaan yang menjelaskan medan axisimetrik stasioner yang dimodelkan oleh bintang berotasi secara uniform terhadap sumbu simetrinya pertama kali disarankan oleh T. Lewis dan kemudian disempurnakan oleh A. Papapetrou dengan merumuskan metriknya berupa:

$$ds^2 = f^2(dt - \omega d\phi)^2 - \frac{1}{f^2}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] \tag{6.1}$$

dengan f, ω, dan γ adalah fungsi ρ dan z saja.
Dengan memilih x^0=t, x^1=ρ,x^2=ϕ,x^3=z, maka persamaan metriknya dapat ditulis dengan

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{6.2}$$

dengan tensor metrik $g_{\mu\nu}$ merupakan matriks 4×4 sebagai berikut:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 & f^2\omega & 0 \\ 0 & -e^{2\gamma}f^{-2} & 0 & 0 \\ f^2\omega & 0 & f^2\omega^2 - r^2f^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2\gamma}f^{-2} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

dan inversnya (tensor metrik kontravarian):

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f^{-2} - \frac{f^2\omega^2}{r^2} & 0 & \frac{f^2\omega}{r^2} & 0 \\ 0 & -e^{-2\gamma}f^2 & 0 & 0 \\ \frac{f^2\omega}{r^2} & 0 & -f^2r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2\gamma}f^2 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

sehingga $\sqrt{-g} = \frac{e^{2\gamma}r}{f^2}$ dimana g adalah determinan dari $g_{\mu\nu}$.

Untuk memudahkan, diperkenalkan suatu basis 1-form (ω^α) yang dinamakan $frame$ tetrad

$$\begin{aligned} \omega^0 &= f(dt - \omega d\phi) \\ \omega^1 &= \frac{1}{f}e^\gamma d\rho \\ \omega^2 &= \frac{1}{f}\rho d\phi \\ \omega^3 &= \frac{1}{f}e^\gamma dz \end{aligned} \tag{6.5}$$

sehingga

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu \end{aligned} \tag{6.6}$$

Dengan demikian dalam kerangka tetrad ini, ruang-waktu seolah-olah menjadi datar ($flat$). Alasan kita memilih $frame$ ini adalah agar tensor metriknya menjadi diagonal sehingga memudahkan kita dalam menurunkan tensor Ricci nya. Selanjutnya, dengan menggunakan metode geometri diferensial yang telah dikembangkan di empat bab pertama, kita akan dapatkan tensor Ricci nya (penurunan selengkapnya dapat dilihat di lampiran). Dalam hal ini, tidak semua komponen tensor Ricci dihitung, melainkan hanya komponen-komponen penting yang akan memberi kontribusi kepada persamaan medannya, yaitu:

$$R^0_0 = e^{-2\gamma}\left[f\left(f_{,11} + f_{,33} + \frac{f_{,1}}{\rho}\right) - (f^2{}_{,1} + f^2{}_{,3}) + \frac{(\omega_{,1})^2 f^6}{2\rho^2} + \frac{(\omega_{,3})^2 f^6}{2\rho^2}\right] \tag{6.7}$$

$$R^1_1 = e^{-2\gamma}\left[3(f_{,1})^2+(f_{,3})^2-f\left(f_{,11}+f_{,33}+\frac{f_{,1}}{\rho}\right)+f^2(\gamma_{,11}+\gamma_{,33})-\frac{(\omega_{,1})^2 f^6}{2\rho^2}-\frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho}\right] \tag{6.8}$$

$$R^3_3 = e^{-2\gamma}\left[(f_{,1})^2+3(f_{,3})^2-f\left(f_{,11}+f_{,33}+\frac{f_{,1}}{\rho}\right)+f^2(\gamma_{,11}+\gamma_{,33})+\frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho}-\frac{(\omega_{,3})^2 f^6}{2\rho^2}\right] \tag{6.9}$$

Kedua persamaan terakhir ini jika dicari selisihnya adalah:

$$R^1_1 - R^3{}_3 = e^{-2\gamma}\left[2((f_{,1})^2-(f_{,3})^2)-\frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho}-\frac{f^6}{2\rho^2}\left((\omega_{,1})^2-(\omega_{,3})^2\right)\right] \tag{6.10}$$

$$R^0_2 = -e^{-2\gamma}\left[\frac{\omega_{,11} f^4}{2\rho}+\frac{\omega_{,33} f^4}{2\rho}+\frac{2\omega_{,3} f_{,3} f^3}{\rho}+\frac{2\omega_{,1} f_{,1} f^3}{\rho}-\frac{\omega_{,1} f^4}{2\rho^2}\right] \tag{6.11}$$

$$R^1_3 = e^{-2\gamma}\left[2f_{,1} f_{,3}-\frac{\gamma_{,3} f^2}{\rho}-\frac{\omega_{,1}\,\omega_{,3} f^6}{2\rho^2}\right] \tag{6.12}$$

dimana digunakan notasi

$$\begin{aligned} A_{,1} &= \frac{\partial A}{\partial \rho} \\ A_{,3} &= \frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2 Persamaan Medan Einstein Axisimetrik Vakum

Dalam tugas akhir ini, akan dibahas persamaan medan Einstein vakum dari metrik Lewis-Papapetrou. Secara fisis, ini berarti membahas medan gravitasi di luar sumber materi (bintang). Karena di luar bintang dianggap tidak ada distribusi massa, maka tensor energi-momentumnya bernilai nol: T^μ_ν=0, sehingga persamaan medan Einsteinnya:

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = 0 \tag{6.14}$$

Jika indeks μ dan ν dikontraksi, akan didapatkan

$$R = 0 \tag{6.15}$$

sehingga pers.(6.14) menjadi:

$$R^{\mu}_{\nu} = 0 \tag{6.16}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai tensor Ricci dari pers.(6.7), (6.10), (6.11), dan (6.12) ke persamaan di atas dan dengan melakukan transformasi $f^2 \rightarrow f$ (untuk selanjutnya, metrik Lewis-Papapetrou akan ditulis dalam bentuk $ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - \frac{1}{f}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]$), maka akan diperoleh empat persamaan medan, yaitu:

$$f\nabla^2 f = \nabla f.\nabla f - f^4\rho^{-2}\nabla\omega.\nabla\omega \tag{6.17}$$

$$\nabla \cdot (f^2\rho^{-2}\nabla\omega) = 0 \tag{6.18}$$

$$\gamma_{,1} = \frac{1}{4\rho}\left[f^{-2}\rho^2((f_{,1})^2 - (f_{,3})^2) - f^2((\omega_{,1})^2 - (\omega_{,3})^2\right] \tag{6.19}$$

$$\gamma_{,3} = \frac{1}{2\rho}\left[f^{-2}\rho^2 f_{,1} f_{,3} - f^2\omega_{,1}\omega_{,3}\right] \tag{6.20}$$

dimana

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\widehat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \widehat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \widehat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \nabla^2 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

merupakan operator gradien dan laplacian dalam koordinat silinder.

Persamaan (6.17) – (6.20) inilah yang dinamakan dengan persamaan medan Einstein axisimetrik vakum. Terlihat bahwa dua persamaan pertama merupakan persamaan diferensial parsial orde dua non-linear, sedangkan kedua persamaan terakhir merupakan persamaan diferensial parsial orde satu yang memenuhi syarat integrabilitas ($\gamma_{,13}$=$\gamma_{,31}$) sehingga dapat langsung diintegralkan begitu solusi f dan ω diketahui [5,6].

Bab 7

Persamaan Ernst

Untuk mencari solusi persamaan (6.17) – (6.20) jelas dibutuhkan teknik khusus. Oleh karena itu pada bab ini kita berusaha mencari simetri dari persaaman-persamaan tersebut, terutama persamaan (6.17) dan (6.18) karena solusi γ pada persamaan (6.19) dan (6.20) dapat langsung dicari bila f dan ω diketahui. Simetri tersebut berupa persamaan Ernst yang dapat memadukan persamaan (6.17) dan (6.18).

Tinjau persamaan (6.18). Persamaan ini menyiratkan bahwa ada suatu vektor $\mathbf{A}$ sedemikian rupa sehingga

$$f^2\rho^{-2}\nabla\omega = \nabla \times \mathbf{A} \tag{7.1}$$

Karena $\nabla\omega$ tegak lurus arah azimuth $\widehat{\phi}$, maka persamaan di atas memenuhi kondisi:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \widehat{\phi} = 0 \tag{7.2}$$

Dalam koordinat silinder, $\nabla \times \mathbf{A}$ dituliskan:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \widehat{\rho}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial z}\right)\right] + \widehat{z}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\right] + \widehat{\phi}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right] \tag{7.3}$$

Jika digunakan kondisi (7.2), maka diperoleh:

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} \tag{7.4}$$

Dengan demikian terdapat suatu fungsi skalar $F(\rho, \phi, z)$ sedemikian rupa yang memenuhi (secara lokal)

$$\begin{aligned} A_\rho &= \frac{\partial F}{\partial z} \\ A_z &= \frac{\partial F}{\partial \rho} \end{aligned} \tag{7.5}$$

Dengan demikian persamaan (7.3) dapat dituliskan:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\widehat{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \widehat{z}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right] \tag{7.6}$$

dengan

$$\Phi = \frac{\partial F}{\partial \phi} - \rho A_\rho \tag{7.7}$$

merupakan suatu Potensial Rotasional (*Twist Potential*).Ruas kanan persamaan (7.6) ditulis dalam pernyataan vektor sebagai:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \rho^{-\mathbf{1}}\widehat{\phi} \times \nabla \mathbf{\Phi} \tag{7.8}$$

sehingga persamaan (6.18) menjadi

$$\nabla \cdot (\rho^{-1}\widehat{\phi} \times \nabla \Phi) = 0 \tag{7.9}$$

Dari persamaan (7.1) dan (7.8) diperoleh hubungan

$$\nabla \omega = \rho f^{-2}\widehat{\phi} \times \nabla \Phi \tag{7.10}$$

atau dapat dituliskan

$$f^{-2}\nabla \Phi = -\rho^{-1}\widehat{\phi} \times \nabla \omega \tag{7.11}$$

Dengan demikian, persamaan (7.9) menjadi:

$$\nabla \cdot (f^{-2}\nabla \Phi) = 0 \tag{7.12}$$

yang merupakan persamaan potensial Φ.

Dengan menggunakan hasil (7.10) dan (7.12), maka persamaan (6.17) dan (6.18) dapat dituliskan sebagai:

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \tag{7.13}$$

$$2\nabla f \cdot \nabla \Phi = f\nabla^2 \Phi \tag{7.14}$$

Dengan mendefinisikan suatu potensial kompleks:

$$\varepsilon = f + i\Phi \tag{7.15}$$

yang dinamakan *Potensial Ernst*, maka persamaan (7.13) dan (7.14) masing-masing tidak lain dari bagian riil dan imajiner dari suatu persamaan potensial terpadu:

$$(Re\varepsilon)\nabla^2\varepsilon = \nabla\varepsilon \cdot \nabla\varepsilon \tag{7.16}$$

Persamaan inilah yang dikenal sebagai *Persamaan Ernst.* Persamaan Ernst ini juga muncul dalam persamaan gerak SU$(1,1)$/U(1) σ-model[8].

Jika didefinisikan suatu fungsi kompleks ξ yang memenuhi:

$$\varepsilon = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \tag{7.17}$$

maka dengan mudah dapat dibuktikan bahwa fungsi ξ memenuhi persamaan diferensial berikut:

$$(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi = 2\xi^*\nabla\xi \cdot \nabla\xi \tag{7.18}$$

Bab 8

Persamaan *Inverse Scattering* (Hamburan Balik) dari Persamaan Ernst

Dari bab sebelumnya telah ditunjukkan bahwa untuk mencari solusi persamaan medan Einstein axisimetrik vakum, maka kita haruslah memecahkan persamaan Ernst terlebih dahulu sehingga didapat fungsi f dan ω yang pada gilirannya dapat digunakan untuk menentukan γ. Karena sifat non-linearitas dari persaman Ernst, maka kita tidak dapat menggunakan metode pemisahan variabel seperti dalam persamaan Laplace sebab pada persamaan non-linear, prinsip superposisi tidak lagi berlaku. Dibutuhkan suatu teknik khusus untuk menanganinya. Ada beberapa cara untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial non-linear, seperti: metode Cosgrove [14], metode *inverse scattering* (hamburan balik) [15,16,17], dan metode Gutsunaev-Manko [18.19]. Dalam tugas akhir ini akan digunakan metode Hamburan Balik.

Metode hamburan balik awalnya berasal dari masalah persamaan Schroedinger non-linear. Dalam persamaan Schroedinger, problem mencari fungsi gelombang (biasanya sistem hamburan) dari potensial sistem yang diketahui dinamakan masalah hamburan (*scattering problem*). Sebaliknya, problem mencari potensial sistem jika fungsi gelombang diketahui dinamakan masalah hamburan balik (*inverse scattering problem*). Metode *inverse scattering* ini banyak digunakan untuk memecahkan masalah soliton, yaitu solusi eksak persamaan diferensial parsial non-linear yang stabil. Kita tahu bahwa dewasa ini konsep soliton banyak di-

adopsi dalam fisika partikel. Oleh karena itu, metode *inverse scattering* inipun memiliki aplikasi yang luas dalam bidang fisika partikel. Solusi persamaan Einstein yang diperoleh lewat metode ini dinamakan solsusi soliton.
Ada banyak metode *inverse scattering* yang dikembangkan para fisikawan, terutama dalam menangani persamaan medan gravitasi. Sebut saja metode *inverse scattering* Naugebauer, Zakharov-Belinski, Kinnersley-Chitre. Budiman [6] dalam skripsi s-1 nya menggunakan metode *inverse scattering* Naugebauer untuk mencari solusi persamaan medan Einstein vakum. Dalam tugas akhir ini, penulis bermaksud menggunakan metode dari Zakharov-Belinski.

8.1 Formulasi Matriks Persamaan Ernst

Tinjau persamaan (7.16). Untuk merepresentasikan persamaan tersebut dalam bentuk matriks, kita definisikan suatu matriks $P_{2\times 2}$ yang hermitian sebagai berikut [8]:

$$P = \frac{2}{\varepsilon + \varepsilon^*} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2}(\varepsilon^* - \varepsilon) \\ \frac{i}{2}(\varepsilon^* - \varepsilon) & \varepsilon^*\varepsilon \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

yang memenuhi:

$$P = P^\dagger, \quad (\Gamma P)^2 = I \tag{8.2}$$

dimana

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma)^2 = I \tag{8.3}$$

Maka persamaan (7.16) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\nabla \cdot [(\nabla P)P^{-1}] = 0 \tag{8.4}$$

dan persamaan (6.18)-(6.19) dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \gamma,_\rho &= \frac{\rho}{8} Tr\Big[(P,_\rho P^{-1})^2 - (P,_z P^{-1})^2\Big] \\ \gamma,_z &= \frac{\rho}{4} Tr\Big[(P,_\rho P^{-1})(P,_z P^{-1})\Big] \end{aligned} \tag{8.5}$$

Dengan menggunakan konsep diferensial luar d dan operator Hodge (*), maka persamaan (8.4) dapat ditulis ulang:

$$d[(^*dP)P^{-1}] = 0 \tag{8.6}$$

Jika definisikan suatu koneksi 1-form (1-*form connection*):

$$W = (-dP)P^{-1} \tag{8.7}$$

yang memiliki kelengkungan nol, $dW{+}W \wedge W{=}0$. Maka, pers.(8.6) dapat ditulis dalam bentuk:

$$d({}^*W) = 0 \tag{8.8}$$

Definisikan pula suatu koneksi 1-form Ω yang dibentuk oleh W dan W^*:

$$\Omega(\lambda, \rho, z) = aW + b^*W \tag{8.9}$$

dimana λ merupakan parameter spektral kompleks dan $a(\lambda, \rho, z)$ serta $b(\lambda, \rho, z)$ masing-masing merupakan suatu fungsi skalar kompleks yang memenuhi:

$$\lim_{\lambda \to 0} a(\lambda, \rho, z) = 1 \quad \lim_{\lambda \to 0} b(\lambda, \rho, z) = 0 \tag{8.10}$$

sehingga $\lim_{\lambda \to 0} \Omega{=}W$. Selanjutnya didefinisikan suatu operator diferensial luar yang diperumum (*generalized exterior derivative operator*)D:

$$D = d - \frac{d\Theta}{\partial\Theta/\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda} \tag{8.11}$$

dengan $D^2{=}0$ dan $\Theta(\lambda, \rho, z)$ merupakan suatu fungsi skalar kompleks sedemikian rupa sehingga memenuhi $\lim_{\lambda \to 0} D{=}d$. Maka $\Omega(\lambda, \rho, z)$ akan memenuhi:

$$D\Omega + \Omega \wedge \Omega = 0 \tag{8.12}$$

Persamaan di atas adalah syarat integrabilitas bagi suatu persamaan linear dari matriks $\Psi(\lambda, \rho, z)$:

$$D\Psi = -\Omega\Psi \tag{8.13}$$

Dengan mudah dapat dibuktikan bahwa $\lim_{\lambda \to 0} \Psi{=}P$. Artinya untuk mencari matriks P, dapat ditentukan dari solusi matriks Ψ dengan hubungan:

$$P = \Psi(0, \rho, z) \tag{8.14}$$

Untuk mengintegrasi persamaan Ernst, dibutuhkan minimal satu solusi khusus (*particular solution*). Maka diasumsikan suatu matriks P_0 sebagai sebuah solusi partikular dari persamaan (8.6). Konsekuensinya, terdapat suatu koneksi 1-form

Ω_0, dan dari persamaan (8.13) terdapat pula suatu solusi awal Ψ_0. Dengan demikian solusi persamaan tersebut dapat ditulis:

$$\Psi(\lambda, \rho, z) = \chi(\lambda, \rho, z)\Psi_0 \tag{8.15}$$

dengan $\chi(\lambda, \rho, z)$ suatu matriks transformasi.
Substitusikan kondisi di atas ke persamaan (8.13), diperoleh:

$$D\chi = \chi\Omega_0 - \Omega\chi \tag{8.16}$$

Agar sifat riil dan simetrik dari matriks P terpenuhi, maka kondisi-kondisi di bawah ini:

$$\overline{\chi}(\overline{\lambda}) = \chi(\lambda) \quad \overline{\Psi}(\overline{\lambda}) = \Psi(\lambda) \quad \chi(\infty) = I \tag{8.17}$$

harus terpenuhi. Dengan demikian, masalah kita sekarang teralihkan menjadi masalah mencari matriks χ. Secara umum, masalah penentuan χ merupakan apa yang disebut sebagai masalah Riemann dalam Teori Analisis Fungsional. Solusi masalah ini ditentukan oleh sifat analitik matriks χ dalam bidang kompleks dan secara umum direpresentasikan sebagai jumlah solusi soliton dan solusi non-soliton. Zakharov-Belinski dalam metode inverse scatteringnya hanya mempertimbangkan solusi soliton murni dan mengabaikan solusi non-solitonnya [16]. Eksistensi solusi soliton disebabkan oleh adanya *pole* singularitas matriks χ pada bidang kompleks.
Secara umum, matriks χ dan inversnya memiliki N *simple poles* sehingga diasumsikan berbentuk:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= I + \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k} \\ \chi^{-1}(\lambda) &= I + \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{\lambda - \nu_k} \end{aligned} \tag{8.18}$$

dimana R_k, S_k, μ_k, dan $\nu_k$adalah fungsi ρ dan z. R_k dan S_k independen terhadap λ. Secara umum μ_k dan ν_k kompleks. $\lim_{\lambda\to\infty} \chi(\lambda, \rho, z)$=$I$ mengindikasikan bahwa χ fungsi analitik terhadap λ pada $\lambda \to \infty$.
Dari persamaan (8.15), kita peroleh solusi untuk matriks P adalah:

$$P(\rho, z) = \chi(0, \rho, z)P_0 \tag{8.19}$$

dan dengan mensubstitusi bentuk eksplisit χ dari persamaan (8.18) maka :

$$P(\rho, z) = \left[I - \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{\mu_k}\right] P_0(\rho, z) \tag{8.20}$$

Untuk menentukan bentuk matriks $R_k(\rho, z)$ dan $S_k(\rho, z)$ secara eksplisit, kita cukup meninjau persamaan (8.16) pada *pole* yang dimiliki χ karena keduanya independen terhadap λ. Dengan memasukkan bentuk χ dari persamaan (8.18) ke persamaan (8.16), kita akan dapatkan bahwa persamaan tersebut memiliki *pole* orde satu pada λ=μ_k di ruas kanan tetapi berorde dua di ruas kiri. Oleh karena itu, agar persamaan tersebut konsisten maka disyaratkan koefisien $(\lambda - \mu_k)^{-2}$ pada ruas kiri persamaan haruslah bernilai nol. Artinya:

$$D(\lambda - \mu_k) = 0 \tag{8.21}$$

Solusi persamaan di atas berkaitan dengan akar-akar persamaan aljabar [8,16]

$$\Theta(\lambda, \rho, z)|_{\lambda=\mu_k} = -\omega_k \tag{8.22}$$

dimana ω_k adalah suatu konstanta kompleks. Demikian pula utnuk χ^{-1}, bentuk persamaannya dapat ditulis:

$$D\chi^{-1} = \chi^{-1}\Omega - \Omega_0\chi^{-1} \tag{8.23}$$

dan dengan mensubstitusi bentuk eksplisit χ^{-1}, diperoleh persamaan yang mensyaratkan:

$$D(\lambda - \nu_k) = 0 \tag{8.24}$$

yang solusinya berkaitan dengan

$$\Theta(\lambda, \rho, z)|_{\lambda=\nu_k} = -\omega_k^{'} \tag{8.25}$$

Selanjutnya, persamaan (8.16) dapat pula ditulis dalam

$$\Omega = (\chi\Omega_0 - D\chi)\chi^{-1} \tag{8.26}$$

Karena ruas kiri persamaan di atas tidak memiliki *pole* pada λ=μ_k, maka residu pada ruas kanan haruslah pada λ=μ_k haruslah nol. Konsekuensinya, akan kita peroleh persamaan untuk matriks $R_k(\rho, z)$:

$$\chi(DR_k - R_k\Omega_0)|_{\lambda=\mu_k} = 0 \tag{8.27}$$

dan demikian pula untuk matriks $S_k(\rho, z)$:

$$\chi(DS_k + S_k\Omega_0)|_{\lambda=\mu_k} = 0 \tag{8.28}$$

Sementara itu, untuk menjamin χ dan χ^{-1} pada persamaan (8.18) merupakan inversnya satu sama lain, maka harus dipenuhi kondisi:

$$\chi\chi^{-1} = I \tag{8.29}$$

sehingga

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{R_i}{\lambda - \mu_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{S_j}{\lambda - \nu_j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{R_i S_i}{(\lambda - \mu_i)(\lambda - \nu_j)} = 0 \tag{8.30}$$

Dari kondisi di atas, residu pada λ=μ_i adalah:

$$R_i + \sum_{j=1}^{N} \frac{R_i S_j}{\mu_i - \nu_j} = 0 \tag{8.31}$$

dan residu pada λ=ν_j:

$$S_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{R_i S_j}{\nu_j - \mu_i} = 0 \tag{8.32}$$

Persamaan (8.31) dan (8.32) menunjukkan bahwa R_k dan S_k keduanya merupakan matriks 2×2 terdegenerasi [16] yang memenuhi $R_k\chi^{-1}(\mu_k)$=0 dan $\chi(\nu_k)S_k$=0, sehingga keduanya dapat ditulis dalam bentuk:

$$R_k = \sum_{\alpha=1}^{n-1} m_k^{\alpha} n_k^{\alpha\dagger}, \quad S_k = \sum_{\alpha=1}^{n-1} p_k^{\alpha} q_k^{\alpha\dagger} \tag{8.33}$$

dimana m_k^{α}, n_k^{α}, p_k^{α}, dan q_k^{α} adalah n komponen kolom vektor yang memenuhi hubungan:

$$n_k^{\alpha\dagger}\chi^{-1}(\mu_k) = 0, \quad \chi(\nu_k)p_k^{\alpha} = 0 \tag{8.34}$$

untuk setiap indeks α.

8.2 Reduksi pada Ruang Simetrik

Dengan menggunakan definisi 1-form W dan $\Omega(\lambda)$, kita dapat peroleh:

$$\Omega^T(\lambda) = P^{-1}\Omega(\lambda)P \tag{8.35}$$

dimana P^T=P dengan ^{T} menyatakan transposisi suatu matriks.
Jika persamaan (8.23) ditranspos dan dilakukan transformasi $\lambda \rightarrow \tau$ serta dikalikan kedua ruas dengan P dari kiri dan P_0 dari kanan, maka didapat persamaan:

$$P[D(\chi^T(\tau))^{-1}P_0^{-1} = \Omega(\tau)P(\chi^T(\tau))^{-1}P_0^{-1} - P(\chi^T(\tau))^{-1}P_0^{-1}\Omega_0(\tau) \qquad (8.36)$$

dimana τ:$\lambda \rightarrow \tau(\lambda, rho, z)$ adalah transformasi linear fraksional pada bidang λ kompleks dan memenuhi sifat τ^2=1. Maka $\Omega(\lambda)$ bertransformasi seperti:

$$\Omega(\tau, \rho, z) = W - \Omega(\lambda, \rho, z) \qquad (8.37)$$

dengan:

$$a(\tau, \rho, z) = 1 - a(\lambda, \rho, z), \quad b(\tau, \rho, z) = -b(\lambda, \rho, z) \qquad (8.38)$$

Sekarang tinjau kembali persamaan (8.6). Kalikan kedua ruas dengan P dan ambil hermitian konjugate nya, maka diperoleh:

$$WP - PW^\dagger = 0 \qquad (8.39)$$

yang berakibat:

$$\Omega(\lambda)P - P\Omega^\dagger(\lambda^*) = 0 \qquad (8.40)$$

Dari kondisi (8.2) diperoleh P^{-1}=$\Gamma P \Gamma$ atau $\Gamma W + W^\dagger \Gamma$=0. Dalam konteks $\Omega(\lambda)$ dapat ditulis:

$$\Gamma\Omega(\lambda) + \Omega^\dagger(\lambda^*)\Gamma = 0 \qquad (8.41)$$

Dengan menggunakan kondisi (8.2), persamaan (8.40) dituliskan:

$$P\Gamma\Omega(\lambda)P\Gamma = -\Omega(\lambda) \qquad (8.42)$$

Tinjau pula persamaan (8.13). Kalikan kedua ruas persamaan tersebut dengan ΓP^{-1} dan gunakan (8.37) untuk menghasilkan:

$$D[^{-1}\Psi(\lambda)] = \Gamma P^{-1}\Omega(\tau)\Psi(\lambda) \qquad (8.43)$$

Tukarkan λ dan τ serta gunakan (8.42), maka akan dihasilkan:

$$D[\Gamma P^{-1}\Omega(\tau)] = -\Omega(\lambda)\Gamma P^{-1}\Psi(\tau) \qquad (8.44)$$

Dengan demikian, terlihat bahwa matriks $\Gamma P^{-1}\Psi(\tau)$ memenuhi persamaan diferensial yang sama dengan $\Psi(\lambda)$. Maka kita dapat tuliskan:

$$\Gamma P^{-1}\Psi(\tau) = \Psi(\lambda)J \tag{8.45}$$

dimana J adalah suatu matriks yang memenuhi kondisi DJ=0 dan $detJ \neq 0$. Pada limit $\lambda \to \infty$ ($\tau \to 0$), dan $\lambda \to 0$ ($\tau\infty$) masing-masing kita peroleh:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Psi(\infty)J(\infty) \\ \Gamma P^{-1}\Psi(\infty) &= PJ(\infty) \end{aligned} \tag{8.46}$$

Persamaan di atas mengimplikasikan $J^2(\infty)$=0.
Selanjutnya tinjaulah persamaan:

$$D[\Gamma\Psi(\lambda)] = -\Gamma\Omega(\lambda)\Psi(\lambda) \tag{8.47}$$

yang merupakan variasi dari persamaan (8.13). Ambil hermitian konjugate nya dan tukarkan λ dengan λ^* dan gunakan (8.41) untuk mendapatkan:

$$D[\Psi^\dagger(\lambda^*)\Gamma] = \Psi^\dagger(\lambda^*)\Gamma\Omega(\lambda) \tag{8.48}$$

yang mengindikasikan bahwa $\Psi^\dagger(\lambda^*)\Gamma$ memenuhi persamaan diferensial yang sama dengan yang dipenuhi oleh $\Psi^{-1}(\lambda)$. Dengan demikian, kita dapat:

$$\Psi^\dagger(\lambda^*)\Gamma = J_0\Psi^{-1}(\lambda) \tag{8.49}$$

dimana $detJ_0 \neq 0$. Pada limit $\lambda \to 0$ dan kondisi P^{-1}=$\Gamma P\Gamma$, matriks J_0 menjadi Γ, sehingga kita peroleh:

$$\Psi^{-1}(\lambda) = \Gamma\Psi^\dagger(\lambda^*)\Gamma \tag{8.50}$$

Persamaan (8.45) dan (8.50) mengimplikasikan bahwa matriks $\chi(\lambda)$ haruslah memenuhi kondisi-kondisi berikut:

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(\lambda) &= \Gamma\chi^\dagger(\lambda^*)\Gamma \\ P &= \chi(\lambda)P_0\chi^\dagger(\tau^*) \end{aligned} \tag{8.51}$$

dengan P_0=$P_0^\dagger$.
Sekarang, dengan mensubstitusi bentuk eksplisit matriks χ dan χ^{-1} ke persamaan

di atas dan meninjau pada *pole* $\lambda=\nu_k$, akan didapat residu pada ruas kanan adalah tidak nol. Residu pada ruas kiri pun tidak nol jika $\nu_k=\mu_k^*$. Pada kasus ini, matriks R_k dan S_k saling terkait satu sama lain dengan hubungan:

$$S_k = \Gamma R_k^\dagger \Gamma \tag{8.52}$$

Dengan memasukkan persamaan di atas ke persamaan (8.31), akan diperoleh:

$$R_k + \sum_{i=1}^{N} \frac{R_k \Gamma R_i^\dagger \Gamma}{\mu_k - \mu_i^*} = 0 \tag{8.53}$$

Di lain pihak, persamaan (8.51) pada *pole* $\lambda=\mu_k$ ditulis:

$$R_k P_0 \left[I + \sum_{i=1}^{N} \frac{R_i^\dagger}{\tau(\mu_k) - \mu_i^*} \right] = 0 \tag{8.54}$$

Bab 9

Konstruksi Solusi Soliton Persamaan Ernst

Setelah menngkonstruksi persamaan *inverse scattering* dari persamaan Ernst, tibalah kita untuk mengintegrasinya sehingga didapatkan harga f dan Φ. Dalam formulasi matriks, solusi dari persamaan Ernst berarti solusi bagi matriks P.

Dengan metode *inverse scattering* Zakharov-Belinski ini, jumlah solusi soliton haruslah berupa bilangan bulat genap [17] karena jumlah ganjil akan mengubah *signature* (tanda koefisien *trace*) metrik. Dengan demikian, solusi paling sederhana adalah solusi 2 soliton.

Sebenarnya sejak dekade tahun 60an, sudah banyak solusi persamaan medan Einstein axisimetrik vakum maupun bermuatan listrik yang diperoleh. Solusi Kerr merupakan solusi paling awal kasus ini, dilanjutkan dengan Ernst yang memperkenalkan metode potensial kompleksnya untuk menggeneralisir solusi Kerr. Setelah itu dua ilmuwan Jepang, Akira Tomimatsu dan Humitaka Sato [20] mendefinisikan suatu potensial kompleks fraksional sebagai generalisasi solusi Ernst. Namun dengan diperkenalkannya metode *inverse scattering* ini, telah dibuktikan oleh Neugebauer [7,15] bahwa semua solusi tersebut dapat dipadukan sebagai solusi soliton yang ke-n dari solusi umumnya. Karena keterbasan waktu dan ilmu yang dimiliki, dalam tugas akhir ini penulis hanya menurunkan solusi 2 soliton.

Untuk mengkonstruksi N solusi soliton, maka untuk mudahnya digunakan parameter-parameter yang telah diturunkan oleh Zakharov-Belinski [17]:

$$\begin{aligned}
a(\lambda, \rho, z) &= \frac{\rho^2}{\lambda^2 + \rho^2}, \\
b(\lambda, \rho, z) &= -\frac{\lambda}{\lambda^2 + \rho^2}, \\
\Theta(\lambda, \rho, z) &= \frac{\rho^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} - z, \\
\tau &= -\frac{\rho^2}{\lambda}
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Nilai $\mu_k(\rho, z)$ ditentukan dari solusi persamaan (8.21):

$$\mu_k(\rho, z) = \omega_k - z \pm [(\omega_k - z)^2 + \rho^2]^{\frac{1}{2}} \tag{9.2}$$

9.1 Konstruksi Solusi 2 Soliton Persamaan Ernst

Tinjau persamaan (8.53) dan (8.54). Keduanya merupakan kondisi yang harus dipenuhi secara konsisten oleh matriks R_k agar solusi bagi matriks P mematuhi syarat simetrik (8.2). Kedua kondisi tersebut ekuivalen satu sama lain jika *pole* matriks χ berupa bilangan genap dan memenuhi:

$$\mu_{N+k} = \tau(\mu_k), \quad k = 1, 2, ..., N \tag{9.3}$$

dengan vektor yang bersangkutan memenuhi:

$$n^{\alpha}_{N+k} = \Gamma P_0 n^{\alpha}_k \tag{9.4}$$

Maka, solusi 2 soliton berkaitan dengan 2 *pole* pada matriks χ, dimana *pole* yang pertama berada pada λ=μ dan yang kedua pada λ=$\tau(\mu)$. Konsekuensinya, χ dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda) &= I + \frac{R_1}{\lambda - \mu} + \frac{R_2}{\lambda - \tau(\mu)} \\
\chi^{-1}(\lambda) &= I + \frac{\Gamma R_1^{\dagger} \Gamma}{\lambda - \mu^*} + \frac{\Gamma R_2^{\dagger} \Gamma}{\lambda - \tau(\mu^*)}
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Berdasarkan (8.19), solusi matriks P dapat diperoleh jika nilai R_1 dan R_2 dapat ditentukan.

Karena matriks R_1 dan R_2 saling berdegenerasi satu sama lain, maka mereka dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} R_1 &= m_1 n_1^\dagger \\ R_2 &= m_2 n_2^\dagger P_0 \Gamma \end{aligned} \tag{9.6}$$

dimana:

$$n_1^\dagger = n_{01}^\dagger \Psi_0^{-1}(\mu) \tag{9.7}$$

dan $n_{01}^\dagger$ adalah suatu vektor komoleks konstan sembarang. $\Psi_0^{-1}(\mu)$ memenuhi kondisi (8.50). Kita peroleh vektor m_1 dan m_2 dari persamaan (8.54) yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$\sum_{i=1}^{2N} M_{ki} m_i = \frac{P_0}{\mu_k^*} n_k \tag{9.8}$$

dimana M_{ki} dapat dituliskan:

$$M_{ki} = \frac{(n_k^\dagger P_0 n_i)^*}{\rho^2 + \mu_k^* \mu_i} \tag{9.9}$$

Untuk kasus N=1, dapat diperoleh invers matriks M_{ki} yaitu L_{kl} sedemikian hingga:

$$L_{kl} M_{li} = \delta_{ki} \tag{9.10}$$

Dari (9.8), m_1 dan m_2 dituliskan:

$$\begin{aligned} m_1 &= \xi^{-1}\left[\frac{A}{\mu^*(\rho^2+\mu\mu^*)} P_0 n_1 + \frac{B}{\rho^2(\mu-\mu^*)} \Gamma n_1\right] \\ m_2 &= \xi^{-1}\left[\frac{B}{\mu\mu^*(\mu-\mu^*)} P_0 n_1 - \frac{A}{\mu(\rho^2+\mu\mu^*)} \Gamma n_1\right] \end{aligned} \tag{9.11}$$

dengan

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{A}{(\rho^2+\mu\mu^*)^2} + \frac{B}{\rho^2(\mu-\mu^*)^2} \\ A &= n_1^\dagger P_0 n_1 \\ B &= n_1^\dagger \Gamma n_1 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Maka akan kita dapatkan:

$$\begin{aligned} R_1 &= \xi^{-1}\left[\frac{A}{\mu^*(\rho^2+\mu\mu^*)} P_0 n_1 n_1^\dagger + \frac{B}{\rho^2(\mu-\mu^*)} \Gamma n_1 n_1^\dagger\right] \\ R_2 &= \xi^{-1}\left[\frac{B}{\mu\mu^*(\mu-\mu^*)} P_0 n_1 n_1^\dagger P_0 \Gamma - \frac{A}{\mu(\rho^2+\mu\mu^*)} \Gamma n_1 n - 1^\dagger P_0 \Gamma\right] \end{aligned} \tag{9.13}$$

Substitusikan bentuk di atas ke persamaan (9.5) dan gunakan dalam (8.19), kita peroleh solusi 2-soliton matriks P:

$$\begin{aligned} P &= P_0 - \frac{(\mu-\mu^*)(\rho^2+\mu\mu^*)}{\mu\mu^*[A^2\rho^2(\mu-\mu^*)^2+B(\rho^2+\mu\mu^*)^2]}\Big[A\rho^2(\mu-\mu^*)P_0 n_1 n_1^\dagger P_0 \\ & \quad +B\mu^*(\rho^2+\mu\mu^*)\Gamma n_1 n_1^\dagger P_0 - B\mu(\rho^2+\mu\mu^*)P_0 n_1 n_1^\dagger \Gamma \\ & \quad +A\mu\mu^*(\mu-\mu^*)\Gamma n_1 n_1^\dagger \Gamma\Big] \end{aligned} \tag{9.14}$$

Pernyataan ini menunjukkan bahwa kita dapat mengkonstruksi matriks P dari matriks lama P_0. Sebagai solusi awal (*background solution*) dapat kita ambil solusi Minkowski (*flat space-time*) $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yang berkaitan dengan potensial Ernst $E_0=1$.

Solusi P_0 tersebut memberikan konsekuensi $D\Psi_0=0$, sehingga pada $\lambda=\mu$ matriks Ψ_0 merupakan matriks konstan. Dengan demikian, kondisi (9.7) memberikan solusi n_1 sebagai vektor konstan. Untuk itu, dapat dipilih:

$$n_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

Ambil kombinasi-kombinasi konstanta kompleks α dan β sebagai berikut:

$$a = \alpha\alpha^* + \beta\beta^*, \quad -m = \beta\alpha^* + \alpha\beta^*, \quad -b = \alpha\alpha^* - \beta\beta^*, \quad i\sigma = \beta\alpha^* - \alpha\beta^* \tag{9.16}$$

dimana σ merupakan bagian imajiner dari ω_1 pada persamaan (8.22). Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $a^2 - b^2 - m^2 = \sigma^2$. Dengan definisi-definisi tersebut, kita peroleh: $A=a$ dan $B=-\sigma$.

9.2 Solusi Kerr-NUT

Setelah solusi umum matriks P diperoleh, maka kita dapat memperoleh solusi persamaan Ernst untuk kasus axisimetrik vakum. Solusi ini disebut metrik Kerr-NUT.

Dari persamaan (9.14)-(9.15), kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(\mu-\mu^*)(\rho^2+\mu\mu^*)}{\mu\mu^*[a^2\rho^2(\mu-\mu^*)^2+\sigma(\rho^2+\mu\mu^*)^2]}\Bigg[a\rho^2(\mu-\mu^*)\begin{pmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & \beta\beta^* \end{pmatrix} \\
&\quad -i\sigma\mu^*(\rho^2+\mu\mu^*)\begin{pmatrix} \alpha^*\beta & \beta\beta^* \\ -\alpha\alpha^* & -\alpha\beta^* \end{pmatrix} + i\sigma\mu(\rho^2+\mu\mu^*)\begin{pmatrix} -\alpha\beta^* & \alpha\alpha^* \\ -\beta\beta^* & \alpha^*\beta \end{pmatrix} \\
&\quad +a\mu\mu^*(\mu-\mu^*)\begin{pmatrix} \beta\beta^* & -\alpha^*\beta \\ -\alpha\beta^* & \alpha\alpha^* \end{pmatrix}\Bigg] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(\mu-\mu^*)(\rho^2+\mu\mu^*)}{2\mu\mu^*[a^2\rho^2(\mu-\mu^*)^2+\sigma(\rho^2+\mu\mu^*)^2]}\Bigg[a\rho^2(\mu-\mu^*) \\
&\quad \times\begin{pmatrix} a-b & -i\sigma-m \\ i\sigma-m & a+b \end{pmatrix} - i\sigma\mu^*(\rho^2+\mu\mu^*)\begin{pmatrix} i\sigma-m & a+b \\ -a+b & i\sigma+m \end{pmatrix} \\
&\quad +i\sigma\mu(\rho^2+\mu\mu^*)\begin{pmatrix} i\sigma+m & a-b \\ -a-b & -i\sigma+m \end{pmatrix} + a\mu\mu^*(\mu-\mu^*) \\
&\quad \times\begin{pmatrix} a+b & -i\sigma+m \\ i\sigma+m & a-b \end{pmatrix}\Bigg]
\end{aligned} \tag{9.17}
$$

Karena matriks P berbentuk (8.1), maka untuk menentukan f (Re ε) kita ambil komponen P_{11}. Dengan sedikit perhitungan aljabar akan kita peroleh:

$$
f = \frac{-4\mu\mu^*[a^2\rho^2(\mu-\mu^*)^2+\sigma^2(\rho^2+\mu\mu^*)^2]}{[a(\mu\mu^*-\rho^2)+b(\mu\mu^*+\rho^2)]^2(\mu-\mu^*)^2+[m(\mu-\mu^*)+i\sigma(\mu+\mu^*)]^2(\mu\mu^*+\rho^2)^2} \tag{9.18}
$$

Setelah mendapatkan nilai f, kita dapat menghitung Φ (Im ε) dengan memilih komponen P_{12} atau P_{21} (karena sifat simetrisitas matriks P). Hasilnya adalah:

$$
\Phi = \frac{2(\mu-\mu^*)(\mu\mu^*+\rho^2)[am(\mu-\mu^*)(\mu\mu^*-\rho^2)-ib\sigma(\mu+\mu^*)(\mu\mu^*+\rho^2)]}{[a(\mu\mu^*-\rho^2)+b(\mu\mu^*+\rho^2)]^2(\mu-\mu^*)^2+[m(\mu-\mu^*)+i\sigma(\mu+\mu^*)]^2(\mu\mu^*+\rho^2)^2} \tag{9.19}
$$

Untuk mempermudah penurunan selanjutnya dan melihat arti fisis dari persamaan-persamaan tersebut, akan lebih mudah jika kita bekerja dalam koordinat Boyer-Lindquist (r,θ) yang berkaitan dengan koordinat silinder melalui transformasi:

$$
\begin{aligned}
\rho &= [(r-m)^2+\sigma^2]^{\frac{1}{2}}\sin\theta \\
z &= (r-m)\cos\theta
\end{aligned} \tag{9.20}
$$

dan

$$
\mu(\rho,z) = [(r-m)+i\sigma](1-\cos\theta) \tag{9.21}
$$

Dalam koordinat-koordinat tersebut, persamaan (9.18) dan (9.19) tersederhanakan menjadi:

$$f = \frac{(r-m)^2 + \sigma^2 - a^2 \sin^2\theta}{(b - a\cos\theta)^2 + r^2} \tag{9.22}$$

dan:

$$\Phi = -\frac{2[(r-m)b + ma\cos\theta]}{(b - a\cos\theta)^2 + r^2} \tag{9.23}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari fungsi ω. Ini dapat diperoleh dari Φ dengan hubungan:

$$\nabla\omega = \rho f^{-2}\widehat{\phi} \times \nabla\Phi \tag{9.24}$$

Didapat:

$$\omega = 2\frac{a\sin^2\theta[m(r-m) - \sigma^2] + (a - b\cos\theta)[(r-m)^2 + \sigma^2]}{(r-m)^2 + \sigma^2 - a^2\sin^2\theta} \tag{9.25}$$

dengan mengambil konstanta integrasi sama dengan nol.
Terakhir, γ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan bentuk f dan Φ ke dalam matriks P, lalu mensubstitusikannya ke persamaan (8.5). Hasilnya adalah:

$$e^{2\gamma} = \frac{(r-m)^2 + \sigma^2 - a^2\sin^2\theta}{(r-m)^2 + \sigma^2\cos^2\theta} \tag{9.26}$$

dimana diambil konstanta integrasi sama dengan nol (penurunan mendetail persamaan (9.25) dan (9.26) dapat dilihat di lampiran).
Dengan demikian, metrik Lewis-Papapetrou (6.1) yang menggambarkan lintasan terpendek dalam medan gravitasi dari suatu bintang yang berotasi terhadap sumbu simetrinya (axisimetrik) dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} ds^2 \; = \; & \left[\frac{(r-m)^2 + \sigma^2 - a^2\sin^2\theta}{(b - a\cos\theta)^2 + r^2}\right] \\ & \times \left(dt - 2\frac{a\sin^2\theta[m(r-m) - \sigma^2] + (a - b\cos\theta)[(r-m)^2 + \sigma^2]}{(r-m)^2 + \sigma^2 - a^2\sin^2\theta} d\phi\right)^2 \\ & - \left[\frac{(r-m)^2 + \sigma^2 - a^2\sin^2\theta}{(b - a\cos\theta)^2 + r^2}\right]^{-1} \left[\left(\frac{(r-m)^2 + \sigma^2 - a^2\sin^2\theta}{(r-m)^2 + \sigma^2\cos^2\theta}\right)\right. \\ & \times \left\{\left(\frac{(r-m)^2\sin^2\theta}{(r-m)^2 + \sigma^2} + \cos^2\theta\right) dr^2 + [(r-m)^2 + \sigma^2\cos^2\theta] d\theta^2\right\} \\ & \left. + [(r-m)^2 + \sigma^2]\sin^2\theta d\phi^2 \right] \end{aligned} \tag{9.27}$$

dimana m, a, dan b masing-masing merupakan massa bintang, momentum angular per satuan massa, dan parameter NUT.

9.3 Solusi Schwarzchild

Persamaan (9.27) di atas merupakan persamaan metrik ruang-waktu dari medan gravitasi di di sekitar bintang tak bermuatan (vakum) yang berotasi terhadap sumbu simetrinya (axisimetrik). Jika bintang tersebut tidak berotasi ($\omega \to 0$, $a \to 0$, $b \to 0$, $\sigma^2 \to -m^2$), maka metrik di atas tereduksi menjadi:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \phi^2 d\phi^2 \qquad (9.28)$$

Persamaan di atas ini tak lain merupakan metrik Schwarzchild yang mendeskripsikan ruang-waktu di sekitar bintang yang memiliki simetri bola (*spherically symmetric*). Dengan demikian, dapatlah disimpulkan bahwa solusi Schwarzchild merupakan solusi asimtotik dari solusi Kerr-NUT-Ernst untuk bintang yang berotasi dengan $\omega \to 0$ (diam).

Bab 10

Kesimpulan dan Saran

Metode diferensial modern Cartan digunakan sebagai pendekatan yang lebih formal dalam Teori Relativitas Umum dengan memformulasikan ruang-waktu sebagai manifold diferensiabel pseudo-Riemann 4 dimensi. Pendekatan ini memberikan paradigma yang cukup menarik terhadap fenomena gravitasi. Medan gravitasi muncul sebagai fenomena geometri belaka, yaitu sebagai manifestasi kelengkungan manifold pseudo-Riemann. Yang menarik pula, persamaan medannya (yang dikenal sebagai Persamaan Medan Einstein) muncul sebagai konsekuensi relasi geometris belaka tanpa adanya hipotesis-hipotesis yang intuitif berdasarkan pengamatan eksperimen [1].

Dengan pendekatan topologis ini, persamaan medan Einstein untuk kasus medan gravitasi axisimetrik vakum (yang metriknya dinyatakan oleh metrik Lewis-Papapetrou) dirumuskan. Diperoleh 4 persamaan medan untuk menentukan 3 koefisien f, ω, γ dari metrik Lewis-Papapetrou tersebut. Dengan memperkenalkan potensial kompleks Ernst, persamaan-persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi suatu Persamaan Ernst. Karena baik persamaan medan Einstein maupun persamaan Ernst merupakan persamaan diferensial parsial non-linear, maka dibutuhkan suatu teknik khusus untuk memecahkannya. Teknik yang digunakan di sini adalah teknik *inverse scattering* Zakharov-Belinski dan solusinya dinamakan soliton, yaitu solusi stabil dan terlokalisasi dari persamaan diferensial parsial non-linear. Solusi soliton ini men-generalisasi solusi-solusi persamaan Einstein axisimetrik vakum yang telah ada sebelumnya. Dalam tugas akhir ini ditunjukkan bahwa solusi Kerr-NUT-Ernst merupakan solusi 2 soliton dan solusi Schwarzchild merupakan solusi asimtotik darinya. Dengan metode *inverse scattering* ini, masalah persamaan diferensial parsial non-linear tereduksi menjadi hanya masalah aljabar linear belaka.

Penulis membatasi pembahasan tugas akhir ini hanya sampai medan gravitasi axisimetrik vakum. Sebagai saran bagi penelitian lebih lanjut, ada baiknya jika meninjau kasus axisimetrik bermuatan listrik. Dalam hal ini akan timbul medan lain yaitu medan elektromagnetik yang direpresentasikan oleh persamaan Maxwell, sehingga ruas kanan persamaan Einstein tidak sama dengan nol, melainkan berupa tensor energi-momentum Maxwell. Akan cukup menarik untuk membahas fenomena persamaan medan Einstein-Maxwell axisimetrik dan memecahkannya dengan metode soliton serta arti fisis dari solusi yang diperoleh, mengingat medan elektromagnetik Maxwell dapat ditinjau secara topologi sebagai manifestasi 2-form eksak dari manifold diferensiabel pseudo-Riemann 4 dimensi seperti yang telah dibahas di lampiran.

Terakhir, dalam tugas akhir ini tidak disinggung penerapan metode geometri diferensial modern Cartan ini pada fenomena kuantisasi (fisika kuantum). Akan sangat menarik untuk membahas: apakah fenomena kuantum hanyalah juga sekadar manifestasi geometris belaka? Penulis mempersilahkan para pembaca untuk meneliti dan menjawabnya.

Lampiran A

Delta Kronecker Diperumum

Dalam analisis tensor, kita mengenal Tensor Levi-Civita kovarian $\epsilon_{a_1 \ldots a_p}$ dan kontravarian $\epsilon^{a_1 \ldots a_p}$, yaitu suatu tensor antisimetrik dengan sifat-sifat:

$$\epsilon_{a_1 \ldots a_p} \begin{cases} 1, & (a_1 ... a_p) \text{ permutasi genap dari } (1, ..., p); \\ -1, & (a_1 ... a_p) \text{ permutasi ganjil dari } (1, ..., p); \\ 0, & \text{dua atau lebih index berharga sama.} \end{cases} \tag{A.1}$$

dan demikian pula untuk tensor kontravariannya.
Jelas bahwa keduanya pun bertransformasi layaknya transformasi tensor kovarian dan kontravarian masing-masing. Dari kedua tensor tersebut, dapat dibentuk suatu tensor antisimetris berdasarkan operasi:

$$\epsilon^{a_1 \ldots a_p} \epsilon_{b_1 \ldots b_p} = -\delta^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_p} \tag{A.2}$$

dengan sifat yang sama seperti pers.$(A.1)$. Tensor $\delta^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_p}$ inilah yang dinamakan Delta Kronecker Diperumum (Generalized Kronecker Delta) yang merupakan perluasan dari simbol delta kronecker δ^a_b. Berdasarkan sifat $(A.1)$, maka Delta Kronecker dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih compact:

$$\delta^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_p} = \begin{vmatrix} \delta^{a_1}_{b_1} & ... & \delta^{a_1}_{b_p} \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ \delta^{a_p}_{b_1} & ... & \delta^{a_p}_{b_p} \end{vmatrix} \tag{A.3}$$

Berdasarkan pers.$(A.3)$ tersebut, maka suatu ruang berdimensi-n memiliki hubungan-hubungan:

$$\delta^{a_1 \ldots a_p}_{b_1 \ldots b_p} = \frac{1}{(n-p)} \delta^{a_1 \ldots a_p c}_{b_1 \ldots b_p c} \tag{A.4}$$

untuk n>p.

Sebagai contoh, perkalian luar dua buah 1-form ω^a dan ω^b dinyatakan:

$$\begin{aligned} \omega^a \wedge \omega^b &= \frac{1}{2!}\delta^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\alpha \otimes \omega^\beta \\ &= \frac{1}{2!}(\delta^a_\alpha\delta^b_\beta\omega^\alpha \otimes \omega^\beta - \delta^a_\beta\delta^b_\alpha\omega^\alpha \otimes \omega^\beta) \\ &= \frac{1}{2!}(\omega^a \otimes \omega^b - \omega^b \otimes \omega^a) \end{aligned} \tag{A.5}$$

Lampiran B

Formulasi Intrinsik Persamaan Maxwell

Meskipun dalam tugas akhir ini tidak dibahas aplikasi geometri diferensial modern terhadap medan elektromagnetik, tetapi dalam rangka menunjukkan keampuhan konsep kalkulus forms Elie-Cartan maka penulis akan membahas sedikit konsep topologi dari medan elektromagnetik.

Fenomena elektromagnetik terangkum dalam 4 buah persamaan medan yang dinamakan Persamaan Maxwell. Secara klasik, dalam kasus tidak ada distribusi sumber muatan, empat persamaan tersebut dituliskan:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Persamaan Maxwell sesuai dengan prinsip Relativitas Einstein. Artinya persamaan tersebut invarian terhadap transformasi Lorentz. Dalam bentuk invarian Lorentz, keempat persamaan tersebut terpadukan ke dalam dua buah persamaan tensor. Dua persamaan pertama dan dua persamaan terakhir dari persamaan Maxwell di atas masing-masing dapat ditulis dalam bentuk tensor:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} &= 0 \end{aligned} \tag{B.2}$$

dimana $F_{\mu\nu}$ adalah tensor medan (*field tensor*) yang bersifat anti-simetris dan dapat diturunkan dari suatu potensial-4 A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{B.3}$$

dimana A_μ=$(-\phi, \mathbf{A})$ dengan ϕ adalah potensial skalar listrik dan **A** adalah potensial vektor magnetik. Indeks μ, ρ, dan ν berjalan dari 0 sampai 3 yang menandakan kordinat ruang-waktu 4-D.

Untuk memformulasikan persamaan tensor di atas ke dalam bentuk yang intrinsik, maka kita definisikan potensial A_μ sebagai suatu 1-form dengan basis ω^μ:

$$A = A_\mu \omega^\mu \tag{B.4}$$

yang dapat ditulis dalam koordinat lokal sebagai:

$$A = A_\mu dx^\mu \tag{B.5}$$

Maka diferensial luar dari 1-form di atas membentuk suatu 2-form:

$$\begin{aligned} dA &= dA_\mu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right) dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu \end{aligned} \tag{B.6}$$

Terlihat bahwa tensor medan dapat didefinisikan sebagai 2-form eksak yang dihasilkan dari diferensial luar suatu potensial 1-form A

$$F = dA \tag{B.7}$$

F ini disebut juga sebagai $Faraday$. Jelas bahwa Faraday bersifat *closed*

$$dF = d^2 A = 0 \tag{B.8}$$

yang dalam komponen-komponennya berupa:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{2} d(F_{\mu\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu) \\ &= \frac{1}{2} dF_{\mu\nu} \wedge dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} dx^\rho \wedge dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^\mu}\right] dx^\rho \wedge dx^\nu \wedge dx^\mu \end{aligned} \tag{B.9}$$

sehingga:

$$\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial F_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial F_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}}\right]dx^{\rho}\wedge dx^{\nu}\wedge dx^{\mu}=0 \tag{B.10}$$

Dengan demikian, maka baris kedua dari persamaan $(B.2)$ dapat dituliskan secara intrinsik sebagai:

$$dF = 0 \tag{B.11}$$

Selanjutnya kita tinjau Faraday yang diuraikan dalam basis-basisnya:

$$F=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu} \tag{B.12}$$

dengan dualnya:

$$^{*}F_{\mu\nu}=F^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} \tag{B.13}$$

yang dinamakan *Maxwell*. Jika dikerjakan operator turunan Hodge kepada Faraday, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\delta F &= {}^{*}d^{*}F\\
&= {}^{*}\frac{1}{2}d[{}^{*}F_{\mu\nu}dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}]\\
&= {}^{*}\frac{1}{2}d[\frac{1}{2!}F^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}dx^{\gamma}\wedge dx^{\sigma}]\\
&= {}^{*}\frac{1}{4}[\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}dF^{\alpha\beta}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\sigma}]\\
&= {}^{*}\frac{1}{4}[\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\sigma}]\\
&= \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\partial^{\mu}F_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\sigma\mu\rho}dx^{\rho}\\
&= \frac{1}{4}(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\rho}-\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\beta}_{\mu})\partial^{\mu}F_{\alpha\beta}dx^{\mu}\wedge dx^{\gamma}\wedge dx^{\sigma}\wedge dx^{\rho}\\
&= \frac{1}{4}[\partial^{\beta}F_{\beta\alpha}dx^{\alpha}-\partial^{\beta}F_{\alpha\beta}dx^{\alpha}]\\
&= \frac{1}{4}[\partial^{\beta}F_{\beta\alpha}-\partial^{\beta}F_{\alpha\beta}]dx^{\alpha}\\
&= \frac{1}{4}[\partial^{\beta}F_{\beta\alpha}+\partial^{\beta}F_{\beta\alpha}]dx^{\alpha}\\
&= \frac{1}{2}\partial^{\beta}F_{\beta\alpha}dx^{\alpha}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Karena $\partial_{\mu}F^{\mu\nu}$=0, maka:

$$\delta F = 0 \tag{B.15}$$

Dengan demikian, maka keempat persamaan Maxwell dapat dipadukan ke dalam dua bentuk persamaan intrinsik yang lebih *compact*, yaitu:

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ \delta F &= 0 \end{aligned} \tag{B.16}$$

Inilah persamaan Maxwell dalam bentuk *differential forms.* Persamaan di atas menunjukkan bahwa medan elektromagnetik merupakan gejala geometri dari suatu manifold sebagai konsekuensi dari eksistensi 2-forms eksak di dalamnya. Dalam teori medan klasik kita tahu bahwa potensial tidaklah unik. Sembarang penambahan potensial dapat dilakukan selama tidak mengubah medannya. Kondisi ini dinamakan *gauge freedom* (kebebasan *gauge*). Secara geometri (*differential forms*) kebebasan *gauge* ini direpresentasikan dengan transformasi potensial 1-form A menjadi:

$$A \rightarrow A' = A + d\phi \tag{B.17}$$

dengan ϕ suatu 0-form (skalar). Transformasi ini tidak akan mengubah tensor medan $F_{\mu\nu}$ karena $d^2\phi$=0. Dengan demikian:

$$F = dA = dA' \tag{B.18}$$

yang sesuai dengan teori medan klasik bahwa persamaan Maxwell invarian terhadap transformasi *gauge.* Dari penurunan di atas dapat dilihat bahwa sifat invarian *gauge* tidak lain hanyalah manifestasi geometri pula, yaitu sifat *closed* dari suatu manifold.

Lampiran C

Penurunan Tensor Ricci

Disini akan diberikan penurunan secara lebih mendetail komponen-komponen tensor Ricci hingga diperoleh pers.(6.7) sampai (6.12). Penurunan ini akan menggunakan metode geometri diferensial Cartan yang telah dijabarkan pada empat bab pertama dalam tugas akhir ini.
Setelah didefinisikan basis 1-form pada pers.(6.5) dan diperoleh:

$$\begin{aligned} d\rho &= fe^{-\gamma}\omega^1 \\ d\phi &= \frac{f}{\rho}\omega^2 \\ dz &= fe^{-\gamma}\omega^3 \\ dt &= \frac{1}{f}\omega^0 + \frac{f\omega}{\rho}\omega^2 \end{aligned} \tag{C.1}$$

maka langkah selanjutnya adalah menghitung diferensial luarnya, yaitu:

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= -f_{,1}\, e^{-\gamma}\omega^0 \wedge \omega^1 - f_{,3}\, e^{-\gamma}\omega^0 \wedge \omega^3 - \frac{\omega_{,1}\, f^3}{\rho} e^{-\gamma}\omega^1 \wedge \omega^2 \\ &\quad + \frac{\omega_{,3}\, f^3}{\rho} e^{-\gamma}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^1 &= (f_{,3} - \gamma_{,3}\, f)e^{-\gamma}\omega^1 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 &= (\frac{f}{\rho} - f_{,1})e^{-\gamma}\omega^1 \wedge \omega^2 + f_{,3}\, e^{-\gamma}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^3 &= (\gamma_{,1}\, f - f_{,1})e^{-\gamma}\omega^1 \wedge \omega^3 \end{aligned} \tag{C.2}$$

Setelah itu, dengan mengasumsikan semesta torsionless (T=0), akan didapat persamaan:

$$d\omega^a = -\omega^a{}_b \wedge \omega^b \tag{C.3}$$

Sehingga dengan memasukkan hasil-hasil pers.$(A.2)$, akan kita dapatkan koefisien-koefisien koneksi affin.

$$d\omega^0 = -\omega^0{}_1 \wedge \omega^1 - \omega^0{}_2 \wedge \omega^2 - \omega^0{}_3 \wedge \omega^3 \tag{C.4}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
\omega^0{}_1 &= f_{,1}\, e^{-\gamma}\omega^0 - \frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^2 \\
\omega^0{}_2 &= \frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^1 + \frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^3 \\
\omega^0{}_3 &= f_{,3}\, e^{-\gamma}\omega^0 - \frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^2
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$d\omega^1 = -\omega^1{}_0 \wedge \omega^0 - \omega^1{}_2 \wedge \omega^2 - \omega^1{}_3 \wedge \omega^3 \tag{C.6}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
\omega^1{}_0 &= f_{,1}\, e^{-\gamma}\omega^0 - \frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^2 \\
\omega^1{}_2 &= -\frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^0 - (\frac{f}{\rho} - f_{,1})e^{-\gamma}\omega^2 \\
\omega^1{}_3 &= -(f_{,3} - \gamma_{,3} f)e^{-\gamma}\omega^1 + (f_{,1} - \gamma_{,1} f)e^{-\gamma}\omega^3
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$d\omega^2 = -\omega^2{}_0 \wedge \omega^0 - \omega^2{}_1 \wedge \omega^1 - \omega^2{}_3 \wedge \omega^3 \tag{C.8}$$

sehinga:

$$\omega^2{}_0 = \frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^0 + \frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^3 \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
\omega^2{}_1 &= (\frac{f}{\rho} - f_{,1})e^{-\gamma}\omega^2 + \frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^0 \\
\omega^2{}_3 &= \frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^0 - f_{,3}\, e^{-\gamma}\omega^2
\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$d\omega^3 = -\omega^3{}_0 \wedge \omega^0 - \omega^3{}_1 \wedge \omega^1 - \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 \tag{C.11}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}
\omega^3{}_0 &= -\frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^2 + f_{,3}\, e^{-\gamma}\omega^0 \\
\omega^3{}_1 &= (f_{,3} - \gamma_{,3} f)e^{-\gamma}\omega^1 - (f_{,1} - \gamma_{,1} f)e^{-\gamma}\omega^3 \\
\omega^3{}_2 &= -\frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^0 + f_{,3}\, e^{-\gamma}\omega^2
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Demikianlah 12 komponen Koefisien Koneksi Affin selesai dikomputasi.

Sekarang, saatnya kita menghitung 2-form Kelengkungan Riemann berdasarkan pers.(3.17):

$$
\begin{aligned}
\Re^0{}_1 &= d\omega^0{}_1 + \omega^0{}_2 \wedge \omega^2{}_1 + \omega^0{}_3 \wedge \omega^3{}_1 \\
&= d\Big[f_{,1} e^{-\gamma}\omega^0 - \frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^2\Big] \\
&\quad +(\frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^1 + \frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^3) \wedge \Big[(\frac{f}{\rho} - f_{,1})e^{-\gamma}\omega^2 \\
&\quad + \frac{\omega_{,1} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^0\Big] + \Big[f_{,3} e^{-\gamma}\omega^0 - \frac{\omega_{,3} f^3}{2\rho} e^{-\gamma}\omega^2\Big] \wedge \Big[(f_{,3} - \gamma_{,3} f)e^{-\gamma}\omega^1 \\
&\quad -(f_{,1} - \gamma_{,1} f)e^{-\gamma}\omega^3\Big] \\
&= e^{-2\gamma}\{\Big[f(\gamma_{,1} f_{,1} - \gamma_{,3} f_{,3}) + (f_{,3})^2 - (f_{,1})^2 - f f_{,11} - \frac{(\omega_{,1})^2 f^6}{4\rho^2}\Big]\omega^0 \wedge \omega^1 \\
&\quad + \Big[f(\gamma_{,1} f_{,3} + \gamma_{,3} f_{,1}) - 2f_{,1} f_{,3} - f_{,13} f - \frac{\omega_{,1}\omega_{,3} f^6}{4\rho^2}\Big]\omega^0 \wedge \omega^3 \\
&\quad + \Big[-\frac{\omega_{,11} f^4}{2\rho} - \frac{5\omega_{,1} f_{,1} f^3}{2\rho} + \frac{\omega_{,3} f_{,3} f^3}{2\rho} + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) \\
&\quad + \frac{\omega_{,1} f^4}{2\rho^2}\Big]\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \Big[\frac{\omega_{,13} f^4}{2\rho} + \frac{\omega_{,1} f_{,3} f^3}{\rho} + \frac{\omega_{,3} f_{,1} f^3}{\rho} - \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,3}\omega_{,1} + \gamma_{,1}\omega_{,3}) \\
&\quad - \frac{\omega_{,3} f^4}{2\rho^2}\Big]\omega^2 \wedge \omega^3\}
\end{aligned}
\tag{C.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\Re^0{}_2 &= d\omega^0{}_2 + \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_2 + \omega^0{}_3 \wedge \omega^3{}_2 \\
&= e^{-2\gamma}\{\Big[(f_{,1})^2 - \frac{f_{,1} f}{\rho} + (f_{,3})^2 - \frac{f^6}{4\rho^2}((\omega_{,1})^2 + (\omega_{,3})^2)\Big]\omega^0 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \Big[\frac{f^3}{\rho}(\omega_{,3} f_{,1} - \omega_{,1} f_{,3}) - \frac{\omega_{,3} f^4}{2\rho^2}\Big]\omega^1 \wedge \omega^3\}
\end{aligned}
\tag{C.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\Re^0{}_3 &= d\omega^0{}_3 + \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_3 + \omega^0{}_2 \wedge \omega^2{}_3 \\
&= e^{-2\gamma}\{\Big[-f_{,13}f + f(\gamma_{,1}f_{,3} + \gamma_{,3}f_{,1}) - 2f_{,1}f_{,3} - \frac{\omega_{,1}\omega_{,3}f^6}{4\rho^2}\Big]\omega^0 \wedge \omega^1 \\
&\quad + \Big[(f_{,1})^2 - (f_{,3})^2 - \frac{(\omega_{,3})^2 f^6}{4\rho^2} - f_{,33}f + f(\gamma_{,3}f_{,3} - \gamma_{,1}f_{,1})\Big]\omega^0 \wedge \omega^3 \\
&\quad + \Big[-\frac{\omega_{,13}f^6}{4\rho^2} - \frac{f^3}{\rho}(2\omega_{,1}f_{,3} + \omega_{,3}f_{,1}) + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma,1\omega_{,3} + \gamma_{,3}\omega_{,1})\Big]\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \Big[\frac{f^3}{2\rho}(5\omega_{,3}f_{,3} - \omega_{,1}f_{,1}) + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) + \frac{\omega_{,33}f^6}{2\rho}\Big]
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\Re^1{}_2 &= d\omega^1{}_2 + \omega^1{}_0 \wedge \omega^0{}_3 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_3 \\
&= e^{-2\gamma}\{\Big[-\frac{\omega_{,1}f^4}{2\rho^2} + \frac{5\omega_{,1}f_{,1}f^3}{2\rho} - \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) - \frac{\omega_{,3}f_{,3}f^3}{2\rho} \\
&\quad + \frac{\omega_{,11}f^4}{2\rho}\Big]\omega^0 \wedge \omega^1 \\
&\quad + \Big[-\frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,3}\omega_{,1} + \gamma_{,1}\omega_{,3}) - \frac{2\omega_{,1}f_{,3}f^3}{\rho} - \frac{\omega_{,3}f_{,1}f^3}{\rho} \\
&\quad - \frac{\omega_{,13}f^4}{2\rho}\Big]\omega^0 \wedge \omega^3 \\
&\quad + \Big[f(f_{,11} + \frac{f_{,1}}{\rho}) - ((f^2{}_{,1})^2 + (f_{,3})^2) - f(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) + \frac{\gamma_{,1}f^2}{\rho} \\
&\quad + \frac{3(\omega_{,1})^2 f^6}{4\rho^2}\Big]\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \Big[-f_{,13}f + f(\gamma_{,3}f_{,1} + \gamma_{,1}f_{,3}) + \frac{\gamma_{,3}f^2}{\rho} - \frac{3\omega_{,1}\omega_{,3}f^6}{4\rho^2}\Big]\omega^2 \wedge \omega^3\}
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\Re^1{}_3 &= d\omega^1{}_3 + \omega^1{}_0 \wedge \omega^0{}_3 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_3 \\
&= e^{-2\gamma}\{\Big[f(f_{,11} + f_{,33}) - ((f_{,1})^2 + (f^2{}_{,3})^2) - f^2(\gamma_{,11} + \gamma_{,33})\Big]\omega^1 \wedge \omega^3 \\
&\quad + \Big[-\frac{\omega_{,3}f_{,1}f^3}{2\rho} + \frac{\omega_{,1}f_{,3}f^3}{2\rho} + \frac{\omega_{,3}f^4}{2\rho^2}\Big]\omega^0 \wedge \omega^2\}
\end{aligned}
$$

(C.17)

$$
\begin{aligned}
\Re^2{}_3 &= d\omega^2{}_3 + \omega^2{}_0 \wedge \omega^0{}_3 + \omega^2{}_1 \wedge \omega^1{}_3 \\
&= e^{-2\gamma}\Big\{\Big[\frac{\omega_{,3} f^4}{2\rho^2} - \frac{2\omega_{,3} f_{,1} f^3}{\rho} - \frac{\omega_{,1} f_{,3} f^3}{\rho} + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,3} + \gamma_{,3}\omega_{,1}) \\
&\quad - \frac{\omega_{,13} f^4}{2\rho}\Big]\omega^0 \wedge \omega^1 \\
&\quad + \Big[\frac{\omega_{,1} f_{,1} f^3}{2\rho} - \frac{5\omega_{,3} f_{,3} f^3}{2\rho} + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,3}\omega_{,3} - \gamma_{,1}\omega_{,1}) - \frac{\omega_{,33} f^4}{2\rho}\Big]\omega^0 \wedge \omega^3 \\
&\quad + \Big[- f_{,13} f + f(\gamma_{,1} f_{,3} + \gamma_{,3} f_{,1}) - \frac{\gamma_{,3} f^2}{\rho} - \frac{3\omega_{,1}\omega_{,3} f^6}{4\rho^2}\Big]\omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + \Big[f_{,33} f + f(\gamma_{,1} f_{,1} - \gamma_{,3} f_{,3}) - ((f_{,1})^2 + (f_{,3})^2) + \frac{f_{,1} f}{\rho} \\
&\quad - \frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho} + \frac{3(\omega_{,3})^2 f^6}{4\rho^2}\Big]\omega^2 \wedge \omega^3\Big\}
\end{aligned}
$$

(C.18)

Setelah semua komponen 2-form kelengkungan Riemann telah dihitung, maka kita dapat menghitung 2-form kelengkungan kontravarian:

$$\Re^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\nu\nu}\Re_{\nu}{}^{\mu} = -\eta^{\nu\nu}\Re^{\mu}{}_{\nu} \tag{C.19}$$

dan setelah itu tensor kelengkungan Riemann dapat diperoleh berdasarkan persamaan:

$$\Re^{\mu\nu} = \Re^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \tag{C.20}$$

sebagai berikut:

$$\Re^{01} = \Re^{01}_{01}\omega^0\wedge\omega^1+\Re^{01}_{03}\omega^0\wedge\omega^3+\Re^{01}_{12}\omega^1\wedge\omega^2+\Re^{01}_{23}\omega^2\wedge\omega^3$$

$$\begin{aligned}
\Re^{01}_{01} &= -e^{-2\gamma}\Big[f(\gamma_{,1}f_{,1}-\gamma_{,3}f_{,3})+(f_{,3})^2-(f_{,1})^2-ff_{,11}-\frac{(\omega_{,1})^2f^6}{4\rho^2}\Big]\\
\Re^{01}_{03} &= -e^{-2\gamma}\Big[f(\gamma_{,1}f_{,3}+\gamma_{,3}f_{,1})-2f_{,1}f_{,3}-f_{,13}f-\frac{\omega_{,1}\omega_{,3}f^6}{4\rho^2}\Big]\\
\Re^{01}_{12} &= -e^{-2\gamma}\Big[-\frac{\omega_{,11}f^4}{2\rho}-\frac{5\omega_{,1}f_{,1}f^3}{2\rho}+\frac{\omega_{,3}f_{,3}f^3}{2\rho}+\frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1}-\gamma_{,3}\omega_{,3})\\
&\quad+\frac{\omega_{,1}f^4}{2\rho^2}\Big]\\
\Re^{01}_{23} &= -e^{-2\gamma}\Big[\frac{\omega_{,13}f^4}{2\rho}+\frac{\omega_{,1}f_{,3}f^3}{\rho}+\frac{\omega_{,3}f_{,1}f^3}{\rho}-\frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,3}\omega_{,1}+\gamma_{,1}\omega_{,3})\\
&\quad-\frac{\omega_{,3}f^4}{2\rho^2}\Big]
\end{aligned} \tag{C.21}$$

$$\begin{aligned}
\Re^{02} &= \Re^{02}_{02}\omega^0\wedge\omega^2+\Re^{02}_{13}\omega^1\wedge\omega^3\\
\Re^{02}_{02} &= -e^{-2\gamma}\Big[(f_{,1})^2-\frac{f_{,1}f}{\rho}+(f_{,3})^2-\frac{f^6}{4\rho^2}((\omega_{,1})^2+(\omega_{,3})^2)\Big]\\
\Re^{02}_{13} &= -e^{-2\gamma}\Big[\frac{f^3}{\rho}(\omega_{,3}f_{,1}-\omega_{,1}f_{,3})-\frac{\omega_{,3}f^4}{2\rho^2}\Big]
\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\Re^{03} = \Re^{03}_{01}\omega^0\wedge\omega^1+\Re^{03}_{03}\omega^0\wedge\omega^3+\Re^{03}_{12}\omega^1\wedge\omega^2+\Re^{03}_{23}\omega^2\wedge\omega^3$$

$$\begin{aligned}
\Re^{03}_{01} &= -e^{-2\gamma}\Big[-f_{,13}f+f(\gamma_{,1}f_{,3}+\gamma_{,3}f_{,1})-2f_{,1}f_{,3}-\frac{\omega_{,1}\omega_{,3}f^6}{4\rho^2}\Big]\\
\Re^{03}_{03} &= -e^{-2\gamma}\Big[f_{,1})^2-(f_{,3})^2-\frac{(\omega_{,3})^2f^6}{4\rho^2}-f_{,33}f+f(\gamma_{,3}f_{,3}-\gamma_{,1}f_{,1})\Big]\\
\Re^{03}_{12} &= -e^{-2\gamma}\Big[-\frac{\omega_{,13}f^6}{4\rho^2}-\frac{f^3}{\rho}(2\omega_{,1}f_{,3}+\omega_{,3}f_{,1})+\frac{f^4}{2\rho}(\gamma,1\omega_{,3}+\gamma_{,3}\omega_{,1})\Big]\\
\Re^{03}_{23} &= -e^{-2\gamma}\Big[\frac{f^3}{2\rho}(5\omega_{,3}f_{,3}-\omega_{,1}f_{,1})+\frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1}-\gamma_{,3}\omega_{,3})+\frac{\omega_{,33}f^6}{2\rho}\Big]
\end{aligned}$$

(C.23)

$$\Re^{12} = \Re^{12}_{01}\omega^0 \wedge \omega^1 + \Re^{12}_{03}\omega^0 \wedge \omega^3 + \Re^{12}_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Re^{12}_{23}\omega^2 \wedge \omega^3$$

$$\Re^{12}_{01} = -e^{-2\gamma}\Big[-\frac{\omega_{,1} f^4}{2\rho^2} + \frac{5\omega_{,1} f_{,1} f^3}{2\rho} - \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) - \frac{\omega_{,3} f_{,3} f^3}{2\rho} + \frac{\omega_{,11} f^4}{2\rho}\Big]$$

$$\Re^{12}_{03} = -e^{-2\gamma}\Big[-\frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,3}\omega_{,1} + \gamma_{,1}\omega_{,3}) - \frac{2\omega_{,1} f_{,3} f^3}{\rho} - \frac{\omega_{,3} f_{,1} f^3}{\rho} - \frac{\omega_{,13} f^4}{2\rho}\Big]$$

$$\Re^{12}_{12} = -e^{-2\gamma}\Big[f(f_{,11} + \frac{f_{,1}}{\rho}) - ((f^2{}_{,1})^2 + (f_{,3})^2) - f(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) + \frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho} + \frac{3(\omega_{,1})^2 f^6}{4\rho^2}\Big]$$

$$\Re^{12}_{23} = -e^{-2\gamma}\Big[-f_{,13} f + f(\gamma_{,3} f_{,1} + \gamma_{,1} f_{,3}) + \frac{\gamma_{,3} f^2}{\rho} - \frac{3\omega_{,1}\omega_{,3} f^6}{4\rho^2}\Big]$$

(C.24)

$$\Re^{13} = \Re^{13}_{02}\omega^0 \wedge \omega^2 + \Re^{13}_{13}\omega^1 \wedge \omega^3$$

$$\Re^{13}_{02} = -e^{-2\gamma}\Big[-\frac{\omega_{,3} f_{,1} f^3}{2\rho} + \frac{\omega_{,1} f_{,3} f^3}{2\rho} + \frac{\omega_{,3} f^4}{2\rho^2}\Big]$$

$$\Re^{13}_{13} = -e^{-2\gamma}\Big[f(f_{,11} + f_{,33}) - ((f_{,1})^2 + (f^2{}_{,3})^2) - f^2(\gamma_{,11} + \gamma_{,33})\Big]$$

(C.25)

$$
\begin{aligned}
\Re^{23} \;=\; & \Re^{23}_{01}\omega^0 \wedge \omega^1 + \Re^{23}_{03}\omega^0 \wedge \omega^3 + \Re^{23}_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Re^{23}_{23}\omega^2 \wedge \omega^3 \\
& \Re^{23}_{01} = -e^{-2\gamma}\Bigg[\frac{\omega_{,3} f^4}{2\rho^2} - \frac{2\omega_{,3} f_{,1} f^3}{\rho} - \frac{\omega_{,1} f_{,3} f^3}{\rho} + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,3} + \gamma_{,3}\omega_{,1}) \\
& \quad -\frac{\omega_{,13} f^4}{2\rho}\Bigg] \\
& \Re^{23}_{03} = -e^{-2\gamma}\Bigg[\frac{\omega_{,1} f_{,1} f^3}{2\rho} - \frac{5\omega_{,3} f_{,3} f^3}{2\rho} + \frac{f^4}{2r}(\gamma_{,3}\omega_{,3} - \gamma_{,1}\omega_{,1}) - \frac{\omega_{,33} f^4}{2\rho}\Bigg] \\
& \Re^{23}_{12} = -e^{-2\gamma}\Bigg[- f_{,13} f + f(\gamma_{,1} f_{,3} + \gamma_{,3} f_{,1}) - \frac{\gamma_{,3} f^2}{\rho} - \frac{3\omega_{,1}\omega_{,3} f^6}{4\rho^2}\Bigg] \\
& \Re^{23}_{23} = -e^{-2\gamma}\Bigg[f_{,33} f + f(\gamma_{,1} f_{,1} - \gamma_{,3} f_{,3}) - ((f_{,1})^2 + (f_{,3})^2) + \frac{f_{,1} f}{\rho} \\
& \quad -\frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho} + \frac{3(\omega_{,3})^2 f^6}{4\rho^2}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.26}
$$

Setelah itu, tensor Ricci pun dapat dihitung:

$$
R^{\mu}_{\nu} = \Re^{\alpha\mu}_{\alpha\nu} \tag{C.27}
$$

$$
\begin{aligned}
R^0_0 \;=\; & \Re^{10}_{10} + \Re^{20}_{20} + \Re^{30}_{30} \\
=\; & -e^{-2\gamma}\Bigg[f(\gamma_{,1} f_{,1} - \gamma_{,3} f_{,3}) + (f_{,3})^2 - (f_{,1})^2 - f f_{,11} - \frac{(\omega_{,1})^2 f^6}{4\rho^2}\Bigg] \\
& -e^{-2\gamma}\Bigg[(f_{,1})^2 - \frac{f_{,1} f}{\rho} + (f_{,3})^2 - \frac{f^6}{4\rho^2}((\omega_{,1})^2 + (\omega_{,3})^2)\Bigg] \\
& -e^{-2\gamma}\Bigg[f_{,1})^2 - (f_{,3})^2 - \frac{(\omega_{,3})^2 f^6}{4\rho^2} - f_{,33} f + f(\gamma_{,3} f_{,3} - \gamma_{,1} f_{,1})\Bigg] \\
=\; & e^{-2\gamma}\Bigg[f(f_{,11} + f_{,33} + \frac{f_{,1}}{\rho}) - (f^2{}_{,1} + f^2{}_{,3}) + \frac{(\omega_{,1})^2 f^6}{2\rho^2} + \frac{(\omega_{,3})^2 f^6}{2\rho^2}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{C.28}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_1 &= \Re^{01}_{01} + \Re^{21}_{21} + \Re^{31}_{31} \\
&= -e^{-2\gamma}\left[f(\gamma_{,1} f_{,1} - \gamma_{,3} f_{,3}) + (f_{,3})^2 - (f_{,1})^2 - f f_{,11} - \frac{(\omega_{,1})^2 f^6}{4\rho^2}\right] \\
&\quad -e^{-2\gamma}\left[f(f_{,11} + \frac{f_{,1}}{\rho}) - ((f^2{}_{,1})^2 + (f_{,3})^2) - f(\gamma_{,1}\,\omega_{,1} - \gamma_{,3}\,\omega_{,3})\right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho} + \frac{3(\omega_{,1})^2 f^6}{4\rho^2}\right] \\
&\quad -e^{-2\gamma}\left[f(f_{,11} + f_{,33}) - ((f_{,1})^2 + (f_{,3})^2) - f^2(\gamma_{,11} + \gamma_{,33})\right] \\
&= e^{-2\gamma}\left[3(f_{,1})^2 + (f_{,3})^2 - f(f_{,11} + f_{,33} + \frac{f_{,1}}{\rho}) + f^2(\gamma_{,11} + \gamma_{,33})\right. \\
&\quad \left. - \frac{(\omega_{,1})^2 f^6}{2\rho^2} - \frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho}\right]
\end{aligned} \tag{C.29}
$$

$$
\begin{aligned}
R^3_3 &= \Re^{03}_{03} + \Re^{13}_{13} + \Re^{23}_{23} \\
&= -e^{-2\gamma}\left[(f_{,1})^2 - (f_{,3})^2 - \frac{(\omega_{,3})^2 f^6}{4\rho^2} - f_{,33} f + f(\gamma_{,3} f_{,3} - \gamma_{,1} f_{,1})\right] \\
&\quad -e^{-2\gamma}\left[f(f_{,11} + f_{,33}) - ((f_{,1})^2 + (f_{,3})^2) - f^2(\gamma_{,11} + \gamma_{,33})\right] \\
&\quad -e^{-2\gamma}\left[f_{,33} f + f(\gamma_{,1} f_{,1} - \gamma_{,3} f_{,3}) - ((f_{,1})^2 + (f_{,3})^2) + \frac{f_{,1} f}{\rho}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho} + \frac{3(\omega_{,3})^2 f^6}{4\rho^2}\right] \\
&= e^{-2\gamma}\left[(f_{,1})^2 + 3(f_{,3})^2 - f(f_{,11} + f_{,33} + \frac{f_{,1}}{\rho}) + f^2(\gamma_{,11} + \gamma_{,33})\right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_{,1} f^2}{\rho} - \frac{(\omega_{,3})^2 f^6}{2\rho^2}\right]
\end{aligned} \tag{C.30}
$$

$$
\begin{aligned}
R^0_2 &= \Re^{10}_{12} + \Re^{30}_{32} \\
&= -\Re^{01}{}_{12} - \Re^{03}{}_{23} \\
&= e^{-2\gamma}\left[-\frac{\omega_{,11} f^4}{2\rho} - \frac{5\omega_{,1} f_{,1} f^3}{2\rho} + \frac{\omega_{,3} f_{,3} f^3}{2\rho} + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) + \frac{\omega_{,1} f^4}{2\rho^2}\right] \\
&\quad + e^{-2\gamma}\left[\frac{f^3}{2\rho}(5\omega_{,3} f_{,3} - \omega_{,1} f_{,1}) + \frac{f^4}{2\rho}(\gamma_{,1}\omega_{,1} - \gamma_{,3}\omega_{,3}) + \frac{\omega_{,33} f^6}{2\rho}\right] \\
&= -e^{-2\gamma}\left[\frac{\omega_{,11} f^4}{2\rho} + \frac{\omega_{,33} f^4}{2\rho} + \frac{2\omega_{,3} f_{,3} f^3}{\rho} + \frac{2\omega_{,1} f_{,1} f^3}{\rho} - \frac{\omega_{,1} f^4}{2\rho^2}\right]
\end{aligned}
\tag{C.31}
$$

$$
\begin{aligned}
R^1_3 &= \Re^{01}_{03} + \Re^{21}_{23} \\
&= -e^{-2\gamma}\left[f(\gamma_{,1} f_{,3} + \gamma_{,3} f_{,1}) - 2f_{,1} f_{,3} - f_{,13} f - \frac{\omega_{,1}\omega_{,3} f^6}{4\rho^2}\right] \\
&\quad + e^{-2\gamma}\left[-f_{,13} f + f(\gamma_{,3} f_{,1} + \gamma_{,1} f_{,3}) + \frac{\gamma_{,3} f^2}{\rho} - \frac{3\omega_{,1}\omega_{,3} f^6}{4\rho^2}\right] \\
&= e^{-2\gamma}\left[2f_{,1} f_{,3} - \frac{\gamma_{,3} f^2}{\rho} - \frac{\omega_{,1}\omega_{,3} f^6}{2\rho^2}\right]
\end{aligned}
\tag{C.32}
$$

Lampiran D

Perhitungan Potensial Kerr-NUT-Ernst

Untuk memperoleh fungsi ω dari metrik Kerr-NUT-Ernst, kita mulai dari persamaan (9.24) dimana fungsi Φ dinyatakan oleha persamaan (9.23). Dalam koordinat silinder, persamaan (9.24) terurai dalam komponen-komponennya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial\rho} &= \frac{\rho}{f^2}\frac{\partial\Phi}{z} \\ \frac{\partial\omega}{\partial z} &= -\frac{\rho}{f^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \end{aligned} \tag{D.1}$$

Dalam koordinat Boyer-Lindquist, persamaan di atas bertransformasi menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial\ r}\frac{\partial r}{\partial\rho} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} &= \frac{\rho}{f^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \frac{-\rho}{f^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\rho} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right) \end{aligned} \tag{D.2}$$

Eliminasikan kedua persamaan di atas dan ambil suku $\frac{\partial\omega}{\partial r}$, maka didapat:

$$\frac{\partial\omega}{\partial r} = \frac{\rho}{\left(\frac{\partial r}{\partial\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)f^2}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2\right]\right\} \tag{D.3}$$

Untuk mengintegrasi persamaan ($D.3$) ini, perlu dicari fungsi-fungsi di ruas kanan. Diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial \rho} &= \frac{[(r-m)^2+\sigma^2]^{1/2}(r-m)\sin\theta}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta} \\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{[(r-m)^2+\sigma^2]\cos\theta}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta} \\
\frac{\partial \theta}{\partial \rho} &= \frac{[(r-m)^2+\sigma^2]^{1/2}\cos\theta}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta} \\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{-(r-m)\sin\theta}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial \rho}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} &= \frac{-[(r-m)^2+\sigma^2]^{1/2}}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta} \\
\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial \rho}\frac{\partial \theta}{\partial \rho} &= 0 \\
\left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 &= \frac{1}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Selain itu juga dicari:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{4r[(r-m)b+ma\cos\theta]-2b[(b-a\cos\theta)^2+r^2]}{[(b-a\cos\theta)^2+r^2]^2} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= \frac{2ma[(b-a\cos\theta)^2+r^2]\sin\theta+4a\sin\theta(b-a\cos\theta)[(r-m)b+ma\cos\theta]}{[(b-a\cos\theta)^2+r^2]^2}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Dengan memasukkan persamaan ($D.5$) dan ($D.6$) ke persamaan ($D.3$), akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{-\sin\theta}{[(r-m)^2+\sigma^2-a^2\sin^2\theta]^2}\Big[2ma\sin\theta(b-a\cos\theta)^2+2mar^2\sin\theta \\
&\quad +4a\sin\theta(b-a\cos\theta)\{(r-m)b+ma\cos\theta\}\Big]
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Integralkan persamaan di atas dan ambil konstanta integrasi sama dengan nol, maka didapat:

$$\omega = 2\frac{a\sin^2\theta[m(r-m)-\sigma^2]+(a-b\cos\theta)[(r-m)^2+\sigma^2]}{(r-m)^2+\sigma^2-a^2\sin^2\theta} \tag{D.8}$$

Selanjutnya kita mencari fungsi γ dengan menggunakan persamaan (8.5). P dan P^{-1} masing-masing dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 1 & \Phi \\ \Phi & f^2+\Phi^2 \end{pmatrix} \\ P^{-1} &= \frac{1}{f}\begin{pmatrix} f^2+\Phi^2 & -\Phi \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{D.9}$$

Untuk mempermudah, kita definisikan:

$$\begin{aligned} U &\equiv P_{,\rho}P^{-1} \\ V &\equiv P_{,z}P^{-1} \end{aligned} \tag{D.10}$$

sehingga persamaan (8.5) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \gamma_{,\rho} &= \frac{\rho}{8}Tr[U^2-V^2] \\ \gamma_{,z} &= \frac{\rho}{4}Tr[UV] \end{aligned} \tag{D.11}$$

U dan V dapat dengan mudah dihitung:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{f^2}\begin{pmatrix} -(ff_{,\rho}+\Phi\Phi_{,\rho}) & -\Phi_{,\rho} \\ (f^2+\Phi^2)-\Phi(ff_{,\rho}+\Phi\Phi_{,\rho}) & (ff_{,\rho}+\Phi\Phi_{,\rho}) \end{pmatrix} \\ V &= \frac{1}{f^2}\begin{pmatrix} -(ff_{,z}+\Phi\Phi_{,z}) & -\Phi_{,z} \\ (f^2+\Phi^2)-\Phi(ff_{,z}+\Phi\Phi_{,z}) & (ff_{,z}+\Phi\Phi_{,z}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{D.12}$$

Masukkan hasil di atas ke dalam persamaan $(D.11)$ dan ambil trace nya, maka persamaan $(D.11)$ tersederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} \gamma_{,\rho} &= \frac{\rho}{4f^2}\{[(f_{,\rho})^2-(f_{,z})^2]+[(\Phi_{,\rho})^2-(\Phi_{,z})^2]\} \\ \gamma_{,z} &= \frac{\rho}{2f^2}[f_{,\rho}f_{,z}+\Phi_{,\rho}\Phi_{,z}] \end{aligned} \tag{D.13}$$

Selanjutnya, dengan menguraikan persamaan di atas ke dalam koordinat Boyer-Lindquist dan mengeliminasi suku $\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}$ seperti pada persamaan $(D.3)$, akan kita peroleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial r} &= \frac{\rho}{4\left(\frac{\partial r}{\partial\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)f^2}\left[\frac{\partial\theta}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\rho}\right)^2\right.\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right] \\
&\quad -2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right]\frac{\partial r}{\partial\rho}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial\theta}{\partial z} \\
&\quad \left. -4\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial r}{\partial z}\right] \qquad \text{(D.14)}
\end{aligned}$$

Dengan memasukkan hasil-hasil dari $(D.4)$-$(D.6)$, maka persamaan di atas tersederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial r} = \frac{(b^2+m^2)(r-m)\sin^2\theta}{[(r-m)^2+\sigma^2-a^2\sin^2\theta][(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta]} \qquad \text{(D.15)}$$

Integrasikan persamaan $(D.15)$ dan ambil konstanta integrasi sama dengan nol, maka diperoleh:

$$\gamma = \ln\left[\frac{(r-m)^2+\sigma^2-a^2\sin^2\theta}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta}\right]^{1/2} \qquad \text{(D.16)}$$

atau:

$$e^{2\gamma} = \frac{(r-m)^2+\sigma^2-a^2\sin^2\theta}{(r-m)^2+\sigma^2\cos^2\theta} \qquad \text{(D.17)}$$

Daftar Acuan

[1] Wospakrik, H.J. **Perkenalan Geometri Diferensial Modern pada Teori Relativitas Umum Einstein dan Gerak Foton di Sekitar Bintang Bermuatan Listrik**. Skripsi S-1. Departemen Fisika ITB.(1976).

[2] Carmelli, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. John Wiley and Sons. (1982).

[3] Schutz, Bernard. **Geometrical Methods of Mathematical Physics**. Cambridge University Press. (1990).

[4] Ryder, Lewis H. **Quantum Field Theory**. Cambridge University Press.

[5] Ernst, Frederick J. **New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem**. Phys.Rev 167, 1175. (1968).

[6] Budiman, Willy. **Solusi Soliton dari Persamaan Medan Gravitasi Axisimetrik Vakum**. Skripsi S-1. (2005).

[7] Neugebauer,G and Meinel, R. **Progress in Relativistic Gravitational Theory using the Inverse Scattering Method**. arXiv:gr-qc/0304086 v1 23 April 2003.

[8] Karasu, Ayse. **On Soliton Solution of Non-Linear Sigma Models of Symmetric Spaces**. International Journal of Modern Physics A, Vol.16, no.27 (2001) 4409-4427.

[9] Hu, Bo-You et all. **Differential Geometry for Physicists**. Advanced Series on Theoretical Physics vol.6. World Scientific. (1997).

[10] Chandrasekhar, S. **The Mathematical Theory of Black Holes**. Oxford Classic Texts in the Physical Sciences. Clarendon Press. (1985).

[11] Lovelock, David et all. **Tensors, Differential Forms, and Variational Principles**. John Wiley and Sons. (1975).

[12] Moise, E. **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**. Addison-Wesley Publishing Company. (1989).

[13] Wald, Robert. **General Relativity**. The University of Chicago Press. (1984).

[14] Cosgrove,C.M. **A New Formulation of the Field Equations for the Stationary Axisymmetric Vacuum Gravitational Field I. General Theory**. J. Phys.A, 11,2390. (1978).

[15] Neugebauer, G. **Gravitostatic and Rotating Bodies in General Relativity**. IOP,70. (1986).

[16] Belinski,V.A and Zakharov,V.E. **Integration of the Einstein Equations by Means of the Inverse Scattering Problem Technique and Construction of Exact Soliton Solutions**. Sov.Phys. JETP 48, 985 (1978).

[17] Belinski,V.A and Zakharov,V.E. **Stationary Gravitational Solitons with Axial Symmetry**. Sov.Phys. JETP 50, 1 (1979).

[18] Castejon-Amendo,J and Manko,V.S. **Superposition of the Kerr Metric with the Generalised Erez-Rosen Solution**. Phys.Rev D41, 2018. (1990).

[19] Chauduri,S. **On the Generation Techniques of Axially Symmetric Stationary Metrics**. Pramana Journal of Physics. Indian Academy Sciences, Vol.58 no.3 449-456 (2002).

[20] Tomimatsu, A and Sato, H. **New Exact Solution for the Gravitational Field of a Spinning Mass**. Phys.Rev.Lett. Vol.29 no. 19. (1972).