Teori Relativitas Umum

P.A.M. Dirac

14 Januari 2005

Perpustakaan Kongres Pengkatalogan dalam Data Publikasi

Dirac, Paul Adrien Maurice, 1902 -

Teori Relativitas Umum.

"Publikasi Wiley-Interscience."

Berbasis kuliah yang diberikan di *Florida State University*, Jurusan Fisika.

Meliputi indeks.

1. Relativitas Umum (Fisika)   1. Judul.

QC173.6.D57   530.1 1   75 8690

ISBN 0-471-21575-9

Dicetak di Amerika Serikat

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Pendahuluan

Teori Relativitas Umum Einstein memerlukan ruang lengkung untuk menggambarkan dunia fisis. Jika kita berharap menuju di luar pembahasan dangkal hubungan-hubungan fisis, kita perlu menyusun persamaan yang tepat untuk menangani ruang lengkung. Terdapat teknik matematika yang mapan tetapi agak rumit untuk menangani hal ini. Ini harus dikuasai oleh mahasiswa yang berharap untuk dapat memahami teori Einstein.

Buku ini disusun dari kuliah yang diberikan di Jurusan Fisika *Florida State University* dan memiliki tujuan menghadirkan materi pokok dalam bentuk langsung dan ringkas. Ini tidak memerlukan pengetahuan pendahuluan di luar ide-ide dasar relativitas khusus dan penanganan diferensiasi fungsi-fungsi medan. Ini akan memungkinkan mahasiswa melewati rintangan utama dalam memahami relativitas umum dengan waktu dan kesulitan minimum dan menjadi bermutu untuk melanjutkan lebih dalam ke sembarang aspek khusus yang menjadi bidang minatnya.

P.A.M. Dirac

Tallahassee, Florida

February 1975

Daftar Isi

Bab 1

Relativitas Khusus

Untuk fisika ruang-waktu kita memerlukan empat koordinat, yakni koordinat waktu t dan tiga koordinat ruang x, y, z. Kita mengajukan

$$t = x^0, \qquad x = x^1, \qquad y = x^2, \qquad z = x^3,$$

sehingga koordinat empat dapat ditulis x^μ, dimana sufiks μ mengambil empat nilai $0, 1, 2, 3$. Sufiks ditulis dalam posisi atas agar kita dapat mempertahankan "keseimbangan" sufiks dalam seluruh persamaan umum teori. Arti yang tepat keseimbangan menjadi jelas kemudian.

Misalkan kita mengambil sebuah titik dekat dengan titik yang mulanya kita tinjau dan misalkan koordinatnya menjadi $x + dx^\mu$. Kuantitas empat dx^μ yang membentuk pergeseran dapat ditinjau sebagai komponen-komponen vektor. Hukum-hukum relativitas khusus memperkenankan kita untuk melakukan transformasi tak homogen linier koordinat, menghasilkan transformasi homogen linier dx^μ. Hal ini sedemikian sehingga, jika kita memilih satuan jarak dan waktu sehingga kecepatan cahaya adalah satu,

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1.1}$$

invarian.

Sembarang himpunan kuantitas empat A^μ yang mentransformasi dalam perubahan koordinat dengan cara yang sama sebagaimana bentuk dx^μ disebut *vektor kotravarian.*

Kuantitas invarian

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A) \tag{1.2}$$

dapat disebut kuadrat panjang vektor. Dengan vektor kontravarian kedua B^μ, kita memiliki invariansi perkalian skalar

$$A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = (A, B). \tag{1.3}$$

Untuk memperoleh cara yang tepat bagi penulisan invariansi-invariansi demikian kita memperkenalkan perangkat penurun sufiks. Definisikan

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \tag{1.4}$$

Maka pernyataan pada sisi kiri (1.2) dapat ditulis sebagai $A_\mu A^\mu$, ini dipahami bahwa penjumlahan dilakukan meliputi empat nilai μ. Dengan notasi yang sama, kita dapat menulis (1.3) sebagai $A_\mu B^\mu$ atau $A^\mu B_\mu$.

Kuantitas empat A_μ yang diperkenalkan oleh (1.4) dapat ditinjau sebagai komponen vektor. Hukum transformasi komponen vektor tersebut dalam perubahan koordinat berbeda dengan A^μ, karena perbedaan tanda, dan vektor ini disebut *vektor kovarian.*

Dari dua vektor kontravarian A^μ dan B^μ kita dapat membentuk enam belas kuantitas $A^\mu B^\nu$. Sufiks ν, seperti seluruh sufiks Greek yang muncul dalam pekerjaan ini, juga mengambil empat nilai $0, 1, 2, 3$. Enam belas kuantitas ini membentuk komponen tensor peringkat kedua. Ini terkadang disebut perkalian luar vektor A^μ dan B^μ, berbeda dengan perkalian skalar (1.3), yang disebut perkalian dalam.

Tensor $A^\mu B^\nu$ adalah tensor khusus karena terdapat relasi khusus antar komponen-komponennya. Tetapi kita dapat menambahkan bersama beberapa tensor yang dikonstruksi dalam cara ini, untuk memperoleh tensor umum peringkat kedua; katakanlah

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + A'^\mu B'^\nu + A''^\mu B''^\nu + \ldots\ . \tag{1.5}$$

Hal penting dari tensor umum adalah transformasi koordinat komponen-komponennya mentransformasi dalam cara yang sama sebagaimana kuantitas $A^\mu B^\nu$.

Kita dapat menurunkan salah satu dari sufiks-sufiks dalam $T^{\mu\nu}$ dengan menerapkan proses penurunan tiap sufiks suku-suku sisi kanan (1.5). Jadi, kita dapat membentuk $T_\mu{}^\nu$ atau $T^\mu{}_\nu$. Kita dapat menurunkan kedua sufiks untuk memperoleh $T_{\mu\nu}$.

Dalam ${T_\mu}^\nu$ kita dapat menyusun $\nu = \mu$ dan memperoleh ${T_\mu}^\mu$. Ini adalah penjumlahan yang meliputi empat nilai μ. Penjumlahan selalu dinyatakan secara tak langsung dibalik sebuah sufiks yang muncul dua kali dalam sebuah suku. Jadi ${T_\mu}^\mu$ adalah skalar. Ini sama dengan T^μ_μ.

Kita dapat melanjutkan proses ini dan mengalikan lebih dari dua vektor bersama-sama, hati-hati bahwa sufiks-sufiks vektor-vektor tersebut seluruhnya berbeda. Dalam cara ini kita dapat mengkonstruksi tensor orde lebih tinggi. Jika vektor seluruhnya kontravarian, kita memperoleh tensor dengan seluruh sufiksnya di atas. Kita kemudian dapat menurunkan sembarang sufiks dan memperoleh tensor umum dengan sembarang jumlah sufiks di atas dan sembarang jumlah sufiks di bawah.

Kita dapat menyusun sufiks bawah sama dengan sufiks atas. Kemudian kita jumlahkan seluruh nilai sufiks ini. Sufiks menjadi boneka (*dummy*). Kita diberi tensor yang memiliki dua sufiks efektif lebih sedikit dibanding sufiks awal. Proses ini disebut *konstraksi*. Jadi, jika kita mulai dengan tensor peringkat keempat ${T^\mu}_{\nu\rho}{}^\sigma$, satu cara mengkonstraksi tensor tersebut adalah dengan mengajukan $\sigma = \rho$, menghasilkan tensor peringkat kedua ${T^\mu}_{\nu\rho}{}^\rho$, memiliki hanya enam belas komponen, muncul dari empat nilai μ dan ν. Kita dapat mengkonstraksi lagi untuk memperoleh skalar ${T^\mu}_{\mu\rho}{}^\rho$, dengan hanya satu komponen. Pada tahapan ini kita dapat mengapresiasi keseimbangan sufiks. Sembarang sufiks efektif terjadi dalam sebuah persamaan muncul sekali dan hanya sekali dalam tiap-tiap suku persamaan, dan selalu di atas atau selalu di bawah. Sufiks ini dapat diganti dengan sembarang huruf Greek lain yang tak disebut dalam suku. Jadi ${T^\mu}_{\nu\rho}{}^\rho = {T^\mu}_{\nu\alpha}{}^\alpha$. Sebuah sufiks harus tak pernah muncul lebih dari dua kali dalam sebuah suku.

Bab 2

Sumbu Miring

Sebelum melewati formalisme relativitas umum adalah tepat untuk meninjau formalisme antara - relativitas khusus merujuk sumbu rektilinier miring.

Jika kita melakukan transformasi sumbu miring, tiap dx^μ yang disebut dalam (1.1) menjadi fungsi linier dx^μ baru dan bentuk kuadratik (1.1) menjadi bentuk kuadratik umum dalam dx^μ baru. Kita dapat menuliskannya sebagai

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.1}$$

dengan penjumlahan meliputi kedua μ dan ν. Koefisien $g_{\mu\nu}$ yang muncul di sini gayut sistem sumbu miring. Tentunya kita mengambil $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, karena sembarang perbedaan $g_{\mu\nu}$ dan $g_{\nu\mu}$ tidak akan nampak dalam bentuk kuadratik (2.1). Terdapat sepuluh koefisien tak gayut $g_{\mu\nu}$.

Sebuah vektor kontravarian umum memiliki komponen empat A^μ yang mentransformasi seperti dx^μ dalam sembarang transformasi sumbu miring. Jadi

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

adalah invarian. Ini adalah kuadrat panjang vektor A^μ.

Misalkan B^μ adalah vektor kontravarian kedua; maka $A^\mu + \lambda B^\mu$ adalah vektor kontravarian lain, untuk sembarang nilai bilangan λ. Kuadrat panjangnya adalah

$$g_{\mu\nu}(A^\mu + \lambda B^\mu)(A^\nu + \lambda B^\nu) = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + \lambda(g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu + g_{\mu\nu} A^\nu B^\mu) + \lambda^2 g_{\mu\nu} B^\mu B^\nu.$$

Ini pasti invariansi untuk seluruh nilai λ. Ini mengikuti, suku tak gayut λ dan koefisien-koefisien λ dan λ^2 harus secara terpisah invarian. Koefisien λ adalah

$$g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu + g_{\mu\nu}A^\nu B^\mu = 2g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu,$$

karena dalam suku kedua pada sisi kiri, kita dapat mempertukarkan μ dengan ν dan kemudian menggunakan $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Jadi kita menemukan, $g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ invarian. Ini adalah perkalian skalar A^μ dan B^μ.

Misalkan g menjadi determinan $g_{\mu\nu}$. Ini harus tidak lenyap; selain itu empat sumbu tak akan menyediakan arah-arah tak gayut dalam ruang-waktu dan tak akan sesuai sebagai sumbu-sumbu. Untuk sumbu ortogonal dari bab terdahulu, elemen-elemen diagonal $g_{\mu\nu}$ adalah $1, -1, -1, -1$ dan elemen-elemen tak diagonal adalah nol. Jadi $g = -1$. Dengan sumbu miring g harus negatip, karena sumbu miring dapat diperoleh dari sumbu-sumbu ortogonal dengan proses kontinu, menghasilkan g berubah secara kontinu dan g tak dapat melaui nilai nol.

Definisikan vektor kovarian A_μ, dengan sufiks bawah, sebagai

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \tag{2.2}$$

Karena determinan g tidak lenyap, persamaan ini dapat disolusi untuk A^ν dalam kaitannya dengan A_μ. Maka hasilnya menjadi

$$A^\nu = g^{\mu\nu}A_\mu. \tag{2.3}$$

Masing-masing $g^{\mu\nu}$ sama dengan kofaktor $g_{\mu\nu}$ terkait dalam determinan $g_{\mu\nu}$, dibagi dengan determinan itu sendiri. Ini memperkenankan $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$.

Misalkan kita mensubstitusi A^ν dalam (2.2), nilai A^ν diberikan oleh (2.3). Kita harus mengganti μ boneka dalam (2.3) dengan huruf Greek lain, katakanlah ρ, agar supaya tidak muncul tiga μ dalam suku yang sama. Kita memperoleh

$$A_\mu = g_{\mu\nu}g^{\nu\rho}A_\rho.$$

Karena persamaan ini harus berlaku untuk sembarang kuantitas empat A_μ, kita dapat mengambil kesimpulan

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = g_\mu^\rho, \tag{2.4}$$

dimana

$$
\begin{aligned}
g^{\rho}_{\mu} &= 1 \quad \text{untuk } \mu = \rho, \\
g^{\rho}_{\mu} &= 0 \quad \text{untuk } \mu \neq \rho.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Formula (2.2) dapat digunakan untuk menurunkan sembarang sufiks atas yang muncul dalam sebuah tensor. Dengan cara serupa, (2.3) dapat digunakan untuk menaikkan sembarang sufiks bawah. Jika sufiks diturunkan dan dinaikkan lagi, hasilnya sama dengan tensor awal, pada perhitungan dari (2.4) dan (2.5). Catat, g^{ρ}_{μ} hanya menghasilkan substitusi ρ untuk μ,

$$g^{\rho}_{\mu} A^{\mu} = A^{\rho},$$

atau μ untuk ρ,

$$g^{\rho}_{\mu} A_{\rho} = A_{\mu}.$$

Jika kita menerapkan aturan menaikkan sufiks μ dalam $g_{\mu\nu}$, kita memperoleh

$$g^{\alpha}{}_{\nu} = g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu}.$$

Ini bersesuaian dengan (2.4), jika kita melakukan perhitungan bahwa dalam $g^{\alpha}{}_{\nu}$ kita dapat menulis satu sufiks di atas sufiks lain, karena simetri $g_{\mu\nu}$. Lebih jauh, kita dapat menaikkan sufiks ν dengan aturan yang sama, diperoleh

$$g^{\alpha\beta} = g^{\nu\beta} g^{\alpha}_{\nu},$$

hasil yang mengikuti dengan segera dari (2.5). Aturan menaikkan dan menurunkan sufiks berlaku untuk seluruh sufiks dalam $g_{\mu\nu}, g^{\mu}_{\nu}, g^{\mu\nu}$.

Bab 3

Koordinat Kurvalinier

Kita sekarang menggunakan sistem koordinat kurvalinier. Kita akan berhubungan dengan kuantitas-kuantitas yang ditempatkan pada suatu titik dalam ruang. Kuantitas demikian dapat memiliki berbagai komponen, yang kemudian dirujuk terhadap sumbu-sumbu pada titik tersebut. Terdapat barangkali kuantitas yang memiliki sifat yang sama pada seluruh titik-titik ruang. Ini menjadi kuantitas medan.

Jika kita mengambil kuantitas demikian Q (atau salah satu komponennya, jika Q memiliki beberapa komponen), kita dapat menurunkannya berkaitan dengan sembarang koordinat empat. Kita menulis hasilnya sebagai

$$\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} = Q_{,\mu}.$$

Sufiks bawah didahului dengan koma akan selalu menyatakan turunan dalam cara ini. Kita meletakkan sufiks μ di bawah untuk menyeimbangkan sufiks atas μ di penyebut pada sisi kiri. Kita dapat melihat keseimbangan sufiks tersebut dengan mencatat bahwa perubahan Q, ketika kita berangkat dari titik x^μ menuju titik berdekatan $x^\mu + \delta x^\mu$, adalah

$$\delta Q = Q_{,\mu} \delta x^\mu. \tag{3.1}$$

Kita akan memiliki vektor dan tensor ditempatkan pada suatu titik, dengan berbagai komponen merujuk sumbu-sumbu pada titik tersebut. Ketika kita mengubah sistem koordinat kita, komponen-komponen akan berubah menurut hukum yang sama sebagaimana dalam bagian sebelumnya, gayut perubahan sumbu pada titik yang ditinjau.

Kita memiliki $g_{\mu\nu}$ dan $g^{\mu\nu}$ untuk menurunkan dan menaikkan sufiks, sebagaimana sebelumnya. Tetapi *mereka bukan lagi konstanta-konstanta.* Mereka berubah dari titik ke titik. Mereka adalah kuantitas medan.

Marilah kita lihat efek perubahan khusus dalam sistem koordinat. Ambil koordinat kurvalinier baru x'^{μ}, masing-masing fungsi x empat. Mereka dapat ditulis dengan lebih tepat sebagai $x^{\mu'}$, dengan aksen tercantum pada sufiks ketimbang simbol utama.

Perlakukan variasi kecil dalam x^{μ}, kita memperoleh kuantitas empat δx^{μ}, yang membentuk komponen vektor kontravarian. Merujuk sumbu baru, vektor ini memiliki komponen

$$\delta x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} \delta x^{\nu} = x^{\mu'}_{,\ \nu} \delta x^{\nu},$$

dengan notasi (3.1). Ini memberi hukum transformasi sembarang vektor kontravarian A^{ν}; katakanlah,

$$A^{\mu'} = x^{\mu'}_{,\ \nu} A^{\nu}. \tag{3.2}$$

Pertukarkan dua sistem sumbu dan ubah sufiks-sufiks, kita peroleh

$$A^{\lambda} = x^{\lambda}_{,\ \mu'} A^{\mu'}. \tag{3.3}$$

Kita mengetahui dari hukum turunan parsial bahwa

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = g^{\lambda}_{\nu},$$

dengan notasi (2.5). Jadi

$$x^{\lambda}_{,\ \mu'} \ .\ x^{\mu'}_{,\ \nu} = g^{\lambda}_{\nu}. \tag{3.4}$$

Ini memungkinkan kita melihat, dua persamaan (3.2) dan (3.3) konsisten, karena jika kita mensubstitusi (3.2) ke sisi kanan (3.3), kita memperoleh

$$x^{\lambda}_{,\ \mu'} \ .\ x^{\mu'}_{,\ \nu} A^{\nu} = g^{\lambda}_{\nu} A^{\nu} = A^{\lambda}.$$

Untuk melihat bagaimana vektor kovarian B_{μ} bertransformasi, kita gunakan syarat $A^{\mu} B_{\mu}$ invarian. Jadi dengan bantuan (3.3)

$$A^{\mu'} B_{\mu'} = A^{\lambda} B_{\lambda} = x^{\lambda}_{,\ \mu'} \ .\ A^{\mu'} B_{\lambda}.$$

Hasil ini harus berlaku untuk seluruh nilai $A^{\mu'}$ empat; oleh karena itu, kita dapat menyamakan koefisien $A^{\mu'}$ dan memperoleh

$$B_{\mu'} = x^{\lambda}_{,\ \mu'} B_{\lambda}. \tag{3.5}$$

Kita sekarang dapat menggunakan formula (3.2) dan (3.5) untuk mentransformasikan sembarang tensor dengan sembarang sufiks atas dan bawah. Kita harus menggunakan koefisien-koefisien seperti $x^{\mu'}_{,\ \nu}$ untuk tiap-tiap sufiks atas dan seperti $x^{\lambda}_{,\ \mu'}$ untuk tiap-tiap sufiks bawah dan membuat seluruh sufiks seimbang. Sebagai contoh

$$T^{\alpha'\beta'}_{\gamma'} = x^{\alpha'}_{,\ \lambda} x^{\beta'}_{,\ \mu} x^{\nu}_{,\ \gamma'} T^{\lambda\mu}{}_{\nu}. \tag{3.6}$$

Sembarang kuantitas yang mentransformasi menurut hukum ini adalah tensor. Ini dapat diambil sebagai definisi tensor.

Perlu dicatat, hal ini bermakna tensor menjadi simetri atau antisimetri antara dua sufiks seperti λ dan μ, karena sifat simetri ini dipertahankan dalam perubahan koordinat-koordinat.

Formula (3.4) dapat ditulis

$$x^{\lambda}_{,\ \alpha'} x^{\beta'}_{,\ \nu} g^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\lambda}_{\nu}.$$

Ini hanya menunjukkan, g^{λ}_{ν} adalah tensor. Kita juga memiliki, untuk sembarang vektor A^{μ}, B^{ν},

$$g_{\alpha'\beta'} A^{\alpha'} B^{\beta'} = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu}_{,\ \alpha'} x^{\nu}_{,\ \beta'} A^{\alpha'} B^{\beta'}.$$

Karena ini berlaku untuk seluruh nilai $A^{\alpha'}, B^{\beta'}$, kita dapat menyimpulkan

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\mu\nu} x^{\mu}_{,\ \alpha'} x^{\nu}_{,\ \beta'}. \tag{3.7}$$

Ini menunjukkan, $g_{\mu\nu}$ adalah tensor. Dengan cara serupa, $g^{\mu\nu}$ adalah tensor. Mereka disebut *tensor fundamental.*

Jika S adalah sembarang kuantitas medan skalar, S dapat ditinjau sebagai fungsi x^{μ} empat atau $x^{\mu'}$ empat. Dari hukum turunan parsial

$$S_{,\ \mu'} = S_{,\ \lambda} x^{\lambda}_{,\ \mu'}.$$

Oleh karena itu $S_{,\lambda}$ mentransformasi seperti B_λ dari persamaan (3.5) dan jadinya *turunan medan skalar adalah medan vektor kovarian.*

Bab 4

Non Tensor

Kita dapat memiliki kuantitas $N^{\mu}{}_{\nu\rho..}$ dengan berbagai sufiks atas dan sufiks bawah, yang bukan tensor. Jika kuantitas ini adalah tensor, kuantitas tersebut harus mentransformasi dalam perubahan sistem koordinat menurut hukum yang ditunjukkan (3.6). Dengan sembarang hukum lain, kuantitas tersebut bukanlah tensor. Tensor memiliki sifat, jika seluruh komponen lenyap dalam satu sistem koordinat, mereka lenyap dalam setiap sistem koordinat. Ini tidak berlaku untuk non tensor.

Untuk non tensor, kita dapat menaikkan dan menurunkan sufiks dengan aturan yang sama sebagaimana untuk tensor. Jadi, sebagai contoh,

$$g^{\alpha\nu}N^{\mu}{}_{\nu\rho} = N^{\mu\alpha}{}_{\rho}.$$

Konsistensi aturan ini benar-benar tak gayut hukum transformasi sistem koordinat yang berbeda. Dengan cara serupa, kita dapat mengkonstraksi non tensor dengan meletakkan sufiks atas dan sufiks bawah dalam jumlah yang sama.

Kita dapat memiliki tensor dan non tensor muncul bersamaan dalam persamaan yang sama. Aturan untuk menyeimbangkan sufiks berlaku sama untuk tensor dan non tensor.

TEOREMA HASIL BAGI

Anggaplah $P_{\lambda\mu\nu}$ sedemikian sehingga $A^{\lambda}P_{\lambda\mu\nu}$ adalah tensor untuk sembarang vektor A^{λ}. Maka $P_{\lambda\mu\nu}$ adalah tensor.

Untuk membuktikan hal ini, tulis $A^\lambda P_{\lambda\mu\nu} = Q_{\mu\nu}$. Kita diberi tensor $Q_{\mu\nu}$; oleh karena itu

$$Q_{\beta\gamma} = Q_{\mu'\nu'} x^{\mu'}_{,\beta} x^{\nu'}_{,\gamma}.$$

Jadi

$$A^\alpha P_{\alpha\beta\gamma} = A^{\lambda'} P_{\lambda'\mu'\nu'} x^{\mu'}_{,\beta} x^{\nu'}_{,\gamma}.$$

Karena A^λ adalah vektor, kita memiliki dari (3.2),

$$A^{\lambda'} = A^\alpha x^{\lambda'}_{,\alpha}.$$

Sehingga

$$A^\alpha P_{\alpha\beta\gamma} = A^\alpha x^{\lambda'}_{,\alpha} P_{\lambda'\mu'\nu'} x^{\mu'}_{,\beta} x^{\nu'}_{,\gamma}.$$

Persamaan ini harus berlaku untuk seluruh nilai A^α, sehingga

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P_{\lambda'\mu'\nu'} x^{\lambda'}_{,\alpha} x^{\mu'}_{,\beta} x^{\nu'}_{,\gamma},$$

menunjukkan, bahwa $P_{\alpha\beta\gamma}$ adalah tensor. Teorema ini juga berlaku jika $P_{\lambda\mu\nu}$ diganti oleh kuantitas dengan sembarang jumlah sufiks, dan jika beberapa sufiks berada di atas.

Bab 5

Ruang Lengkung

Kita dapat dengan mudah membayangkan ruang lengkung dua dimensi sebagai permukaan terbenam dalam ruang Euklidean tiga-dimensi. Dalam cara yang sama, kita dapat memiliki ruang lengkung empat-dimensi terbenam dalam ruang datar berdimensi lebih besar. Ruang lengkung demikian disebut ruang Riemann. Sebuah daerah kecil dari ruang Riemann secara aproksimasi adalah datar. Einstein mengasumsikan, ruang fisis berasal dari ruang Riemann ini dan dengan cara demikian meletakkan fondasi teori gravitasinya. Berurusan dengan ruang lengkung, kita tak dapat memperkenalkan sistem sumbu rektilinier. Kita harus menggunakan koordinat kurvalinier, sebagaimana terkait dalam Bab 3. Keseluruhan formalisme dalam bagian tersebut dapat diterapkan untuk ruang lengkung, karena seluruh persamaan adalah persamaan lokal yang tak diganggu oleh kelengkungan. Jarak invarian ds antara titik x^μ dan titik yang berdekatan $x^\mu + dx^\mu$ diberikan oleh

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

seperti (2.1), ds adalah real untuk interval serupa waktu dan imajiner untuk interval serupa ruang.

Dengan jaringan koordinat kurvalinier $g_{\mu\nu}$, diberikan fungsi koordinat, menentukan seluruh elemen jarak; sehingga mereka menentukan metrik. Mereka menentukan kedua sistem koordinat dan kelengkungan ruang.

Bab 6

Pergeseran Paralel

Anggaplah kita memiliki vektor A^μ yang ditempatkan pada titik P. Jika ruang melengkung, kita tidak dapat memaknai vektor paralel pada titik Q berbeda, sebagaimana dapat dengan mudah kita lihat jika kita meninjau contoh ruang lengkung dua dimensi dalam ruang Euklidean tiga dimensi. Akan tetapi, jika kita mengambil titik P' dekat titik P, terdapat vektor paralel pada P', dengan ketidakpastian orde kedua, perhitungan jarak dari P ke P' sebagai orde pertama. Jadi kita dapat memberi arti terhadap pemindahan vektor A^μ dari P menuju P' dengan mempertahankan vektor tersebut paralel terhadap dirinya sendiri dan mempertahankan panjangnya tetap.

Kita dapat memindahkan vektor secara kontinu sepanjang lintasan dengan proses pergeseran paralel ini. Ambil lintasan dari P menuju Q, kita mengakhiri dengan vektor pada Q yang paralel terhadap vektor awal pada P berkaitan dengan lintasan ini. Tetapi, lintasan berbeda akan memberi hasil berbeda. Tak ada arti mutlak bagi vektor paralel pada Q. Jika kita memindahkan vektor pada P dengan pergeseran paralel sekeliling lup tertutup, kita akan berakhiran dengan vektor pada P yang biasanya dalam arah berbeda.

Kita dapat memperoleh persamaan untuk pergeseran paralel dari vektor dengan menganggap ruang fisis empat-dimensi kita, dibenamkan dalam ruang datar dari orde dimensi yang lebih tinggi; katakanlah N. Dalam ruang berdimendi-N ini, kita memperkenalkan koordinat kurvalinier $z^n (n = 1, 2, ..., N)$. Koordinat ini tidak perlu menjadi ortogonal, hanya rektilinier. Antara dua titik bertetangga ini terdapat jarak invarian ds yang diberikan oleh:

$$ds^2 = h_{nm} dz^n dz^m, \tag{6.1}$$

dijumlahkan untuk $n, m = 1, 2, ..., N$. h_{nm} adalah konstanta, tidak seperti $g_{\mu\nu}$. Kita dapat menggunakan mereka untuk menurunkan sufiks dalam ruang berdimesi ke-N; sehingga

$$ds^2 = h_{nm} dz^m,$$

Ruang fisis membentuk "permukaan" empat-dimensi dalam ruang datar N dimensi. Tiap-tiap titik x^μ dalam permukaan menentukan titik tertentu y^n dalam ruang N-dimensi. Tiap-tiap koordinat y^n adalah fungsi x empat; katakanlah $y^n(x)$. Persamaan permukaan akan diberikan dengan mengeliminasi x empat dari $Ny^n(x)$. Terdapat $N-4$ persamaan demikian.

Dengan menurunkan $y^n(x)$ berkaitan dengan parameter x^μ, kita memperoleh

$$\frac{\partial y^n(x)}{\partial x^\mu} = y^n_{,\mu}.$$

Untuk dua titik berdekatan dalam permukaan, dibedakan oleh δx^μ, kita memperoleh

$$\delta y^n = y^n_{,\mu} \delta x^\mu. \tag{6.2}$$

Kuadrat jarak antara mereka adalah, dari (6.1)

$$\delta s^2 = h_{nm} \delta y^n \delta y^m = h_{nm} y^n_{,\mu} y^m_{,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu.$$

Kita dapat menulisnya

$$\delta s^2 = y^n_{,\mu} y_{n,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu.$$

pada perhitungan h_{nm} konstan. Kita juga memperoleh

$$\delta s^2 = g_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu.$$

Oleh karena itu

$$g_{\mu\nu} = y^n_{,\mu} y_{n,\nu}. \tag{6.3}$$

Ambil vektor kontravarian A^μ dalam ruang fisis, ditempatkan pada titik x. Komponen-komponennya A^μ seperti δx^μ dalam (6.2). Mereka akan menyediakan sebuah vektor kontravarian A^n dalam ruang berdimensi-N, seperti δy^n dalam (6.2). Jadi

$$A^n = y^n_{,\mu} A^\mu. \tag{6.4}$$

Vektor A^n ini, tentunya, terletak pada permukaan.

Sekarang geser vektor A^n, pertahankan vektor tersebut paralel terhadap dirinya sendiri (yang berarti, tentunya, mempertahankan komponen-komponennya konstan), terhadap titik berdekatan $x + dx$ pada permukaan. Vektor tersebut tak akan lagi terletak pada permukaan titik baru, dikarenakan kelengkungan permukaan. Tetapi kita dapat memproyeksikan vektor tersebut terhadap permukaan, untuk memperoleh vektor tertentu yang terletak pada permukaan.

Proses proyeksi terdiri atas pemecahan vektor menjadi dua bagian, bagian tangensial dan bagian normal, dan membuang bagian normal. Jadi

$$A^n = A^n_{tan} + A^n_{nor}. \tag{6.5}$$

Sekarang, jika K^μ menyatakan komponen-komponen A^n_{tan} merujuk sistem koordinat x pada permukaan, kita memiliki, berkaitan dengan (6.4),

$$A^n_{tan} = K^\mu y^n_{,\mu}(x + dx), \tag{6.6}$$

dengan koefisien $y^n_{,\mu}$ diambil pada titik baru $x + dx$.

A^n_{nor} didefinisikan menjadi ortogonal terhadap setiap vektor tangensial pada titik $x + dx$, dan jadinya terhadap setiap vektor seperti sisi kanan (6.6), tak peduli apapun K^μ. Jadi

$$A^n_{nor} y_{n,\mu}(x + dx) = 0.$$

Jika sekarang, kita kalikan (6.5) dengan $y_{n,\nu}(x+dx)$, suku A^n_{nor} keluar dan kita ditinggali dengan

$$\begin{aligned} A^n y_{n,\nu}(x + dx) &= K^\mu y^n_{,\mu}(x + dx) y_{n,\nu}(x + dx) \\ &= K^\mu g_{\mu\nu}(x + dx) \end{aligned}$$

dari (6.3). Jadi terhadap orde pertama dalam dx

$$\begin{aligned} K_\nu(x+dx) &= A^n[y_{n,\nu}(x) + y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma] \\ &= A^\mu y^n_{,\mu}[y_{n,\nu} + y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma] \\ &= A_\nu + A^\mu y^n_{,\mu} y_{n,\nu,\sigma}dx^\sigma. \end{aligned}$$

K_ν adalah hasil pergeseran paralel A_ν terhadap titik $x+dx$. Kita dapat mengajukan

$$K_\nu - A_\nu = dA_\nu,$$

sehingga dA_ν menyatakan perubahan A_ν dalam pergeseran paralel. Maka kita memiliki

$$dA_\nu = A^\mu y^n_{,\mu} y_{n,\nu\,\sigma}dx^\sigma. \tag{6.7}$$

Bab 7

Simbol Christoffel

Dengan menurunkan (6.3) kita memperoleh (abaikan koma kedua dengan dua turunan)

$$\begin{aligned} g_{\mu,\nu,\sigma} &= y^n_{,\mu\sigma} y_{n,\nu} + y^n_{,\mu} y_{n,\nu\sigma} \\ &= y_{n,\mu\sigma} y^n_{,\nu} + y_{n,\nu\sigma} y^n_{,\mu}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

karena kita dapat memindahkan sufiks n secara bebas ke atas atau ke bawah, pada perhitungan kekonstanan h_{mn}. Pertukarkan μ dan σ dalam (7.1) kita memperoleh

$$g_{\sigma\nu,\mu} = y_{n,\sigma\mu} y^n_{,\nu} + y_{n,\nu\mu} y^n_{,\sigma}. \tag{7.2}$$

Pertukarkan ν dan σ dalam (7.1)

$$g_{\mu\sigma,\nu} = y_{n,\mu\nu} y^n_{,\sigma} + y_{n,\sigma\nu} y^n_{,\mu}. \tag{7.3}$$

Sekarang ambil (7.1) + (7.3) − (7.2) dan bagi dengan 2. Hasilnya adalah

$$\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}) = y_{n,\nu\sigma} y^n_{,\mu}. \tag{7.4}$$

Ajukan

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}). \tag{7.5}$$

Ini disebut simbol Christoffel jenis pertama. Simbol ini simetri antara dua sufiks terakhir. Simbol ini adalah non tensor. Konsekuensi sederhana (7.5) adalah

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma}. \tag{7.6}$$

Kita lihat sekarang, (6.7) dapat ditulis sebagai

$$dA_\nu = A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma} dx^\sigma. \tag{7.7}$$

Seluruh rujukan terhadap ruang berdimensi-N sekarang lenyap, sebagaimana simbol Christoffel mencangkup hanya metrik $g_{\mu\nu}$ dari ruang fisis.

Kita dapat menyimpulkan, panjang vektor tak berubah dengan pergeseran paralel. Kita memiliki

$$\begin{aligned} d(g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu) &= g^{\mu\nu}A_\mu dA_\nu + g^{\mu\nu}A_\nu dA_\mu + A_\mu A_\nu g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}dx^\sigma \\ &= A^\nu dA_\nu + A^\mu dA_\mu + A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}dx^\sigma \\ &= A^\nu A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}dx^\sigma + A^\mu A^\nu \Gamma_{\nu\mu\sigma}dx^\sigma + A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}dx^\sigma \\ &= A^\nu A^\mu g_{\mu\nu,\sigma}dx^\sigma + A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}dx^\sigma. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Sekarang $g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma}g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu,\sigma} = (g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu})_{,\sigma} = g^\alpha_{\nu,\sigma} = 0$. Kalikan dengan $g^{\beta\nu}$, kita memperoleh

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g_{\mu\nu\sigma}. \tag{7.9}$$

Ini adalah formula bermanfaat yang memberikan turunan $g^{\alpha\beta}$ dalam hubungannya dengan turunan $g_{\mu\nu}$. Hal ini memperkenankan kita untuk menyimpulkan

$$A_\alpha A_\beta g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = -A^\mu A^\nu g_{\mu\nu,\sigma}$$

dan juga pernyataan (7.8) lenyap. Jadi panjang vektor adalah konstan. Secara khusus, vektor nol (yakni, panjang vektor nol) tetap vektor nol dalam pergeseran paralel.

Kekonstanan panjang vektor juga terjadi dari alasan geometri. Ketika kita memecah vektor A^n ke dalam bagian tangensial dan bagian normal menurut (6.5), bagian normal infinitesimal dan tegak lurus bagian tangensial. Ini terjadi, terhadap orde pertama, panjang vektor seluruhnya sama dengan bagian tangensialnya.

Kekonstanan panjang sembarang vektor menghendaki kekonstanan perkalian skalar $g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu$ dari sembarang dua vektor A dan B. Ini dapat disimpulkan dari kekonstanan panjang $A + \lambda B$ untuk sembarang nilai parameter λ.

Seringkali bermanfaat untuk menaikkan sufiks pertama dari simbol Christoffel sehingga untuk membentuk

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\sigma}.$$

Ini kemudian disebut simbol Christoffel jenis kedua. Simbol ini simetri antara dua sufiks bawahnya. Sebagaimana dijelaskan dalam Bab 4, penaikan ini sungguh diperkenankan, bahkan untuk non tensor.

Formula (7.7) dapat ditulis ulang

$$dA_{\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} A_{\mu} dx^{\sigma}. \tag{7.10}$$

Ini formula standard merujuk komponen kovarian. Untuk vektor kedua B^{ν} kita memiliki

$$d(A_{\nu}B^{\nu}) = 0$$

$$\begin{aligned} A_{\nu}dB^{\nu} &= -B^{\nu}dA_{\nu} = -B^{\nu}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A_{\mu}dx^{\sigma} \\ &= -B^{\mu}\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}A_{\nu}dx^{\sigma}. \end{aligned}$$

Ini harus berlaku untuk sembarang A_{ν}, sehingga kita memperoleh

$$dB^{\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}B^{\mu}dx^{\sigma}. \tag{7.11}$$

Ini formula standard pergeseran paralel merujuk komponen kontravarian.

Bab 8

Geodesik

Ambil sebuah titik dengan kordinat z^μ dan anggap titik tersebut bergerak sepanjang suatu lintasan; kita kemudian memiliki z^μ fungsi parameter τ. Ajukan $dz^\mu/d\tau = u^\mu$.

Terdapat vektor u^μ pada tiap-tiap titik lintasan. Anggaplah, ketika kita bergerak sepanjang lintasan, vektor u^μ berpindah dengan pergeseran paralel. Maka keseluruhan lintasan ditentukan, jika kita diberi titik awal dan nilai awal vektor u^μ. Kita harus menggeser titik awal z^μ ke $z^\mu + u^\mu d\tau$, kemudian menggeser vektor u^μ menuju titik baru ini dengan pergeseran paralel, kemudian menggeser lagi titik tersebut dalam arah yang ditentukan oleh u^μ baru, dan seterusnya. Tak hanya lintasan yang ditentukan, tetapi juga parameter τ sepanjang lintasan itu. Lintasan yang dihasilkan dalam cara ini disebut geodesik.

Jika vektor u^μ pada awalnya vektor nol, vektor tersebut selalu tetap vektor nol dan lintasan disebut geodesik nol. Jika vektor u^μ pada awalnya serupa waktu (yakni, $u^\mu u_\mu > 0$), vektor tersebut selalu serupa waktu dan kita memiliki geodesik serupa waktu. Dengan cara yang sama, jika u^μ pada awalnya serupa ruang ($u^\mu u_\mu < 0$), vektor tersebut selalu serupa ruang dan kita memiliki geodesik serupa ruang.

Kita memperoleh persamaan geodesik dengan menerapkan (7.1) dengan $B^\nu = u^\nu$ dan $dx^\sigma = dz^\sigma$. Jadi

$$\frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} u^\mu \frac{dz^\sigma}{d\tau} = 0 \tag{8.1}$$

atau

$$\frac{d^2 z^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\sigma}{d\tau} = 0. \tag{8.2}$$

Untuk geodesik serupa waktu kita dapat mengalikan u^μ awal dengan sebuah faktor untuk membuat panjangnya satu. Ini hanya memerlukan perubahan dalam skala τ. Vektor u^μ sekarang selalu memiliki panjang satuan. Vektor tersebut hanya vektor kecepatan $v^\mu = dz^\mu/ds$, dan parameter τ menjadi waktu sebenarnya (*proper*) s.

Persamaan (8.1) menjadi

$$\frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\nu v^\sigma = 0. \tag{8.3}$$

Persamaan (8.2) menjadi

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dz^\nu}{ds} \frac{dz^\sigma}{ds} = 0. \tag{8.4}$$

Kita membuat asumsi fisis, garis dunia partikel yang tidak dikenai sembarang gaya, kecuali gravitasi, adalah geodesik serupa waktu. Ini menggantikan hukum gerak pertama Newton. Persamaan (8.4) menentukan percepatan dan memberikan persamaan gerak.

Kita juga membuat asumsi, lintasan berkas cahaya adalah geodesik nol. Ini ditentukan oleh persamaan (8.2) merujuk parameter τ sepanjang lintasan. Waktu proper s tak dapat digunakan sekarang karena ds lenyap.

Bab 9

Sifat Stasioner Geodesik

Sebuah geodesik yang bukan geodesik nol memiliki sifat bahwa $\int ds$, yang diambil sepanjang sebagian lintasan dengan titik-titik ujung P dan Q, adalah stasioner jika kita membuat variasi kecil lintasan dengan mempertahankan titik ujung tetap.

Mari kita anggap tiap-tiap titik lintasan, dengan koordinat z^μ, digeser sehingga koordinatnya menjadi $z^\mu + \delta z^\mu$. Jika dx^μ menyatakan elemen sepanjang lintasan,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Jadi

$$\begin{aligned} ds\delta(ds) &= dx^\mu dx^\nu \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\nu \delta dx^\mu \\ &= dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu,\lambda} \delta x^\lambda + 2 g_{\mu\lambda} dx^\mu \delta dx^\lambda. \end{aligned}$$

Sekarang

$$\delta dx^\lambda = d\delta x^\lambda.$$

Jadi, dengan bantuan $dx^\mu = v^\mu ds$,

$$\delta(ds) = \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu \delta x^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu \frac{d\delta x^\lambda}{ds} \right) ds.$$

Oleh karena itu

$$\delta \int ds = \int \delta(ds) = \int \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu \delta x^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu \frac{d\delta x^\lambda}{ds} \right] ds.$$

Dengan integrasi parsial, gunakan syarat bahwa $\delta x^\lambda = 0$ pada titik-titik ujung P dan Q, kita memperoleh

$$\delta \int ds = \int \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu - \frac{d}{ds}(g_{\mu\lambda} v^\mu) \right] \delta x^\lambda ds. \tag{9.1}$$

Syarat hal ini lenyap, dengan sembarang δx^λ adalah

$$\frac{d}{ds}(g_{\mu\lambda} v^\mu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu = 0. \tag{9.2}$$

Sekarang

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(g_{\mu\lambda} v^\mu) &= g_{\mu\lambda} \frac{dv^\mu}{ds} + g_{\mu\lambda,\nu} v^\mu v^\nu \\ &= g_{\mu\lambda} \frac{dv^\mu}{ds} + \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu}) v^\mu v^\nu. \end{aligned}$$

Jadi syarat (9.2) menjadi

$$g_{\mu\lambda} \frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma_{\lambda\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0.$$

Kalikan persamaan di atas dengan $g^{\lambda\sigma}$, diperoleh

$$\frac{dv^\sigma}{ds} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0,$$

yang merupakan syarat (8.3) menjadi geodesik.

Pekerjaan ini menunjukkan, untuk geodesik, (9.1) lenyap dan $\int ds$ stasioner. Kebalikannya, jika kita mengasumsikan $\int ds$ stasioner, kita dapat menyimpulkan bahwa lintasan adalah geodesik. Jadi, kita dapat menggunakan syarat stasioner sebagai definisi geodesik, kecuali dalam hal geodesik nol.

Bab 10

Turunan Kovarian

Misalkan S adalah medan skalar. Turunan $S_{,\nu}$ adalah vektor kovarian, sebagaimana kita lihat dalam Bab 3. Sekarang misalkan A_μ menjadi medan vektor. Apakah turunan $A_{\mu,\nu}$ adalah tensor ?

Kita harus menguji bagimana $A_{\mu,\nu}$ mentransformasi dalam suatu perubahan sistem koordinat. Dengan notasi dalam Bab 3, A_μ mentransformasi

$$A_{\mu'} = A_\rho x^\rho_{,\mu'}$$

seperti persamaan (3.5), dan oleh karena itu

$$A_{\mu',\nu'} = (A_\rho x^\rho_{,\mu'})_{,\nu'} = A_{\rho,\sigma} x^\sigma_{,\nu'} x^\rho_{,\mu'} + A_\rho x^\rho_{,\mu'\nu'}.$$

Suku terakhir seharusnya tidak berada di sini jika kita memiliki hukum transformasi yang benar untuk tensor. Jadi $A_{\mu,\nu}$ adalah non tensor.

Kita dapat, bagaimanapun, memodifikasi proses diferensiasi untuk memperoleh tensor. Marilah kita ambil vektor A_μ pada titik x dan geser vektor pada titik tersebut menuju $x + dx$ dengan pergeseran paralel. Ini masih merupakan vektor. Kita dapat mengurangkannya dari vektor A_μ pada $x + dx$ dan selisihnya akan menjadi vektor. Vektor ini, terhadap orde pertama

$$A_\mu(x + dx) - [A_\mu(x) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha dx^\nu] = (A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha) dx^\nu.$$

Kuantitas ini adalah vektor untuk sembarang vektor dx^ν; oleh karena itu, dengan teorema hasil bagi dari Bab 4, koefisien

$$A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha$$

adalah tensor. Kita dapat dengan mudah membuktikan secara langsung, tensor ini mentransformasi secara benar dalam suatu perubahan sistem koordinat.

Ini disebut turunan kovarian dari A_μ dan ditulis

$$A_{\mu:\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha. \tag{10.1}$$

Tanda : sebelum sufiks bawah akan selalu menyatakan turunan kovarian, sebagaimana koma menyatakan turunan biasa.

Misalkan B_ν menjadi vektor kedua. Kita mendefinisikan perkalian luar $A_\mu B_\nu$ untuk memperoleh turunan kovarian

$$(A_\mu B_\nu)_{:\sigma} = A_{\mu:\sigma} B_\nu + A_\mu B_{\nu:\sigma}. \tag{10.2}$$

Nyatanya ini adalah tensor dengan tiga sufiks. Tensor ini memiliki nilai

$$\begin{aligned}(A_\mu B_\nu)_{:\sigma} &= (A_{\mu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_\alpha) B_\nu + A_\mu (B_{\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} B_\alpha) \\ &= (A_\mu B_\nu)_{,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_\alpha B_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} A_\mu B_\alpha.\end{aligned}$$

Misalkan $T_{\mu\nu}$ menjadi tensor dengan dua sufiks. Tensor ini dapat dinyatakan sebagai jumlah suku-suku seperti $A_\mu B_\nu$, sehingga turunan kovariannya adalah

$$T_{\mu\nu:\sigma} = T_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} T_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} T_{\mu\alpha}. \tag{10.3}$$

Aturan ini dapat diperluas terhadap turunan kovarian dari tensor $Y_{\mu\nu\ldots}$ dengan sembarang jumlah sufiks di bawah:

$$Y_{\mu\nu\ldots:\sigma} = Y_{\mu\nu\ldots\ ,\sigma} - \text{sebuah suku } \Gamma \text{ untuk tiap-tiap sufiks.} \tag{10.4}$$

Dalam tiap-tiap suku Γ ini kita harus membuat keseimbangan sufiks, yang cukup untuk menetapkan bagaimana sufiks berjalan.

Kasus sebuah skalar dicangkup dalam formula umum (10.4) dengan jumlah sufiks dalam Y nol.

$$Y_{:\sigma} = Y_{,\sigma}. \tag{10.5}$$

Marilah kita menerapkan (10.3) terhadap tensor fundamental $g_{\mu\nu}$. Ini memberi

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu:\sigma} &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} g_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} g_{\mu\alpha} \\ &= g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} = 0 \end{aligned}$$

dari (7.6). Jadi $g_{\mu\nu}$ terhitung sebagai konstanta dalam turunan kovarian.

Formula (10.2) adalah aturan biasa yang kita gunakan untuk menurunkan sebuah perkalian. Kita mengasumsikan aturan biasa ini berlaku juga untuk turunan kovarian dari perkalian skalar dua vektor. Jadi

$$(A^{\mu} B_{\mu})_{:\sigma} = A^{\mu}_{:\sigma} B_{\mu} + A^{\mu} B_{\mu:\sigma}.$$

Kita memperoleh, menurut (10.5) dan (10.1),

$$(A^{\mu} B_{\mu})_{,\sigma} = A^{\mu}_{:\sigma} B_{\mu} + A^{\mu}(B_{\mu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha});$$

dan oleh karena itu

$$A^{\mu}_{,\sigma} B_{\mu} = A^{\mu}{}_{:\sigma} B_{\mu} - A^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} B_{\mu}. \tag{10.6}$$

Karena ini berlaku untuk sembarang B_{μ}, kita memperoleh

$$A^{\mu}{}_{:\sigma} = A^{\mu}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} A^{\alpha}, \tag{10.7}$$

adalah formula dasar turunan kovarian dari vektor kontravarian. Simbol Christoffel yang sama terjadi sebagaimana dalam formula dasar (10.1) untuk vektor kovarian, tetapi sekarang terdapat tanda +. Susunan sufiks secara lengkap ditentukan dengan persyaratan keseimbangan.

Kita dapat memperluas formalisme untuk mencangkup turunan kovarian dari sembarang tensor dengan sembarang jumlah sufiks atas dan bawah. Suku Γ muncul untuk tiap-tiap sufiks, dengan tanda + jika sufiks di atas dan tanda − jika sufiks di bawah. Jika kita mengkonstraksi dua sufiks dalam tensor, suku Γ terkait menghilang.

Formula turunan kovarian dari perkalian,

$$(XY)_{:\sigma} = X_{:\sigma}Y + XY_{:\sigma}, \tag{10.8}$$

sungguh berlaku umum, dengan X dan Y sembarang jenis kuantitas tensor. Pada perhitungan $g_{\mu\nu}$ terhitung sebagai konstanta, kita dapat menggeser sufiks ke atas atau ke bawah sebelum diferensiasi kovarian dan hasilnya sama, jika kita menggeser sufiks ke atas atau ke bawah setelah diferensiasi kovarian.

Turunan kovarian non tensor tak memiliki arti.

Hukum-hukum fisika harus benar dalam seluruh sistem koordinat. Mereka harus dapat dinyatakan sebagai persamaan tensor. Kapan pun mereka mencangkup turunan kuantitas medan, ini pasti turunan kovarian. Persamaan medan dalam fisika harus ditulis ulang dengan turunan biasa diganti dengan turunan kovarian. Sebagai contoh, persamaan d'Alembert $\Box V = 0$ untuk V skalar menjadi, dalam bentuk kovarian

$$g^{\mu\nu}V_{:\mu:\nu} = 0.$$

Ini memberi, dari (10.1) dan (10.5),

$$g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha}) = 0. \tag{10.9}$$

Bahkan jika kita bekerja dengan ruang datar (yang berarti mengabaikan medan gravitasi) dan kita gunakan koordinat kurvalinier, kita harus menulis salah satu persamaan dalam bentuk turunan kovarian, jika kita ingin persamaan-persamaan tersebut berlaku dalam seluruh sistem koordinat.

Bab 11

Tensor Kelengkungan

Dengan hukum perkalian (10.8) kita melihat, turunan kovarian sangat mirip dengan turunan biasa. Terdapat sifat penting dari turunan biasa, yakni jika kita melakukan dua diferensiasi berturut-turut, urutan diferensiasi tak menjadi persoalan, yang tidak, secara umum, berlaku untuk turunan kovarian.

Marilah pertama-tama kita tinjau medan skalar S. Kita memiliki dari formula (10.1),

$$\begin{aligned} S_{:\mu:\nu} &= S_{:\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} S_{:\alpha} \\ &= S_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} S_{,\alpha}. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Ini adalah simetri antara μ dan ν, sehingga dalam hal ini urutan turunan kovarian tak jadi persoalan.

Sekarang mari kita ambil sebuah vektor A_ν dan terapkan dua diferensiasi kovarian terhadapnya. Dari formula (10.3) dengan $A_{\nu:\rho}$ untuk $T_{\nu\rho}$ kita memperoleh

$$\begin{aligned} A_{\nu:\rho:\sigma} &= A_{\nu:\rho,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} A_{\alpha:\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} A_{\nu:\alpha} \\ &= (A_{\nu,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} A_{\alpha})_{,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}(A_{\alpha,\rho} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} A_{\beta}) - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}(A_{\nu,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} A_{\beta}) \\ &= A_{\nu,\rho,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} A_{\alpha,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} A_{\alpha,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} A_{\nu,\alpha} - A_{\beta}(\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}). \end{aligned}$$

Pertukarkan ρ dan σ disini dan kurangkan dari pernyataan sebelumnya. Hasilnya adalah

$$A_{\nu:\rho:\sigma} - A_{\nu:\sigma:\rho} = A_{\beta} R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}, \tag{11.2}$$

dimana

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}. \tag{11.3}$$

Sisi kiri (11.2) adalah tensor. Ini menyusul bahwa sisi kanan (11.2) adalah tensor. Hal ini berlaku untuk sembarang vektor A_β; yakni, dengan teorema hasil bagi dalam Bab 4, $R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}$ adalah tensor. Tensor ini disebut tensor Riemann-Christoffel atau tensor kelengkungan.

Tensor tersebut memiliki sifat nyata

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = -R^{\beta}_{\nu\sigma\rho}. \tag{11.4}$$

Juga, kita dengan mudah melihat dari (11.3) bahwa

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} + R^{\beta}_{\rho\sigma\nu} + R^{\beta}_{\sigma\nu\rho} = 0. \tag{11.5}$$

Marilah kita menurunkan sufiks β dan mengajukan sufiks tersebut sebagai sufiks pertama. Kita memperoleh

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta}R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\alpha\rho} - \langle\rho\sigma\rangle,$$

dimana simbol $\langle\rho\sigma\rangle$ digunakan untuk menyatakan suku sebelumnya dengan ρ dan σ dipertukarkan. Jadi

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} - g_{\mu\beta,\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} + \Gamma_{\mu\beta\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} - \langle\rho\sigma\rangle \\ &= \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} - \Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} - \langle\rho\sigma\rangle, \end{aligned}$$

dari (7.6). Sehingga dari (7.5)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\nu\rho,\mu\sigma}) + \Gamma_{\beta\mu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\rho} - \Gamma_{\beta\mu\rho}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}. \tag{11.6}$$

Beberapa simetri lanjut sekarang menunjukkan; katakanlah,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} \tag{11.7}$$

dan

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}. \tag{11.8}$$

Hasil seluruh simetri ini adalah, dari 256 komponen $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, hanya 20 komponen yang tak gayut.

Bab 12

Syarat Ruang Datar

Jika ruang adalah datar, kita dapat memilih sistem koordinat yang rektilinier, dan kemudian $g_{\mu\nu}$ konstan. Tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ kemudian lenyap.

Kebalikannya, jika $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ lenyap, kita dapat membuktikan bahwa ruang adalah datar. Mari kita ambil vektor A_μ yang ditempatkan pada titik x dan menggesernya dengan pergeseran paralel ke titik $x + dx$. Kemudian geser vektor tersebut dengan pergeseran paralel menuju titik $x+dx+\delta x$. Jika $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ lenyap, hasil pergeseran terhadap vektor A_μ harus sama sebagaimana jika kita pertama-tama menggeser vektor tersebut, dari x menuju $x + \delta x$, kemudian menuju $x + \delta x + dx$. Jadi kita dapat menggeser vektor menuju titik terpisah dan hasil yang kita peroleh tak gayut lintasan terhadap titik terpisah tersebut. Oleh karena itu, jika kita menggeser vektor awal A_μ pada x menuju seluruh titik dengan pergeseran paralel, kita memperoleh medan vektor yang memenuhi $A_{\mu:\nu} = 0$, atau

$$A_{\mu,\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} A_\sigma. \tag{12.1}$$

Dapatkah medan vektor tersebut menjadi gradien skalar ? Marilah kita ajukan $A_\mu = S_{,\mu}$ dalam (12.1). Kita memperoleh

$$S_{,\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu} S_{,\sigma}. \tag{12.2}$$

Pada perhitungan simetri $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ dalam sufiks bawah, kita memiliki nilai yang sama untuk $S_{,\mu\nu}$ sebagaimana $S_{,\nu\mu}$ dan persamaan (12.2) integrabel.

Marilah kita ambil empat skalar tak gayut yang memenuhi (12.2) dan misalkan kita mengambil skalar-skalar tersebut menjadi koordinat-koordinat $x^{\alpha'}$ dari sistem koordinat baru. Maka

$$x^{\alpha'}_{,\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} x^{\alpha'}_{,\sigma}.$$

Menurut hukum transformasi (3.7),

$$g_{\mu\lambda} = g_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'}_{,\mu} x^{\beta'}_{,\lambda}.$$

Diferensiasikan persamaan ini berhubungan dengan x^{ν}, kita memperoleh

$$\begin{aligned} g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\alpha'\beta',\nu} x^{\alpha'}_{,\mu} x^{\beta'}_{,\lambda} &= g_{\alpha'\beta'}(x^{\alpha'}_{,\mu\nu} x^{\beta'}_{,\lambda} + x^{\alpha'}_{,\mu} x^{\beta'}_{,\lambda\nu}) \\ &= g_{\alpha'\beta'}(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} x^{\alpha'}_{,\sigma} x^{\beta'}_{,\lambda} + x^{\alpha'}_{,\mu} \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} x^{\beta'}_{,\sigma}) \\ &= g_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu} = g_{\mu\lambda,\nu} \end{aligned}$$

dari (7.6). Jadi

$$g_{\alpha'\beta',\nu'} x^{\alpha'}_{,\mu} x^{\beta'}_{,\lambda} = 0.$$

Ini menyusul bahwa $g_{\alpha'\beta',\nu} = 0$. Merujuk pada sistem koordinat baru, tensor fundamental adalah konstan. Jadi, kita memiliki ruang datar merujuk koordinat rektilinier.

Bab 13

Relasi Bianci

Untuk berurusan dengan turunan kovarian kedua dari sebuah tensor, ambil pertama-tama kasus dimana tensor adalah perkalian luar dari dua vektor $A_\mu B_\tau$. Kita memiliki

$$\begin{aligned}(A_\mu B_\tau)_{:\rho:\sigma} &= (A_{\mu:\rho}B_\tau + A_\mu B_{\tau:\rho})_{:\sigma} \\ &= A_{\mu:\rho:\sigma}B_\tau + A_{\mu:\rho}B_{\tau:\sigma} + A_{\mu:\sigma}B_{\tau:\rho} + A_\mu B_{\tau:\rho:\sigma}.\end{aligned}$$

Sekarang pertukarkan ρ dan σ dan kurangkan. Kita memperoleh dari (11.2)

$$(A_\mu B_\tau)_{:\rho:\sigma} - (A_\mu B_\tau)_{:\sigma:\tau} = A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + T_{\mu\alpha} R^\alpha_{\tau\rho\sigma}.$$

Sebuah tensor umum $T_{\mu\tau}$ dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suku-suku seperti $A_\mu B_\tau$, sehingga hal ini harus memenuhi

$$T_{\mu\tau:\rho:\sigma} - T_{\mu\tau:\sigma:\rho} = T_{\alpha\tau} R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + T_{\mu\alpha} R^\alpha_{\tau\rho\sigma}. \tag{13.1}$$

Sekarang ambil $T_{\mu\tau}$ menjadi turunan kovarian vektor $A_{\mu:\tau}$. Kita memperoleh

$$A_{\mu:\tau:\rho:\sigma} - A_{\mu:\tau:\sigma:\rho} = A_{\alpha:\tau} R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + A_{\mu:\alpha} R^\alpha_{\tau\rho\sigma}.$$

Dalam formula ini lakukan permutasi siklik τ, ρ, σ dan tambahkan tiga persamaan yang berlaku. Sisi sebelah kiri memberi

$$\begin{aligned}A_{\mu:\rho:\sigma:\tau} - A_{\mu:\sigma:\rho:\tau} + \text{permutasi siklik} &= (A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma})_{:\tau} + \text{permutasi siklik} \\ &= A_{\alpha:\tau} R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + A_\alpha R^\alpha_{\mu\rho\sigma:\tau} + \text{permutasi siklik}\end{aligned}$$

$$(13.2)$$

Sisi kanan memberi

$$A_{\alpha:\tau}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} + \text{permutasi siklik.} \tag{13.3}$$

sebagai suku sisa yang hilang dari (11.5). Suku pertama (13.2) saling menghapus dengan (13.3) dan kita ditinggali dengan

$$A_{\alpha}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + \text{permutasi siklik} = 0.$$

Faktor A_{α} terjadi di seluruh persamaan ini dan dapat dihilangkan. Kita ditinggali dengan

$$R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\tau:\rho} + R^{\alpha}_{\mu\tau\rho:\sigma} = 0. \tag{13.4}$$

Tensor kelengkungan memenuhi persamaan diferensial ini sebaik seluruh relasi simetri dalam Bab 11. Mereka dikenal sebagai relasi Bianci.

Bab 14

Tensor Ricci

Marilah kita mengkonstraksi dua sufiks dalam $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Jika kita mengambil dua sufiks berkaitan dengan sufiks antisimetri, kita memperoleh nol, tentunya. Jika kita mengambil sembarang sufiks lain kita peroleh hasil yang sama, terpisah dari tanda, dikarenakan simetri (11.4), (11.7), dan (11.8). Marilah kita mengambil yang pertama dan terakhir dan mengajukan

$$R^{\mu}_{\nu\rho\mu} = R_{\nu\rho}.$$

Ini disebut tensor Ricci.

Dengan mengalikan (11.8) dengan $g^{\mu\sigma}$ kita memperoleh

$$R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu}. \tag{14.1}$$

Tensor Ricci adalah simetri.

Kita dapat mengkonstraksi lagi dan membentuk

$$g^{\nu\rho}R_{\nu\rho} = R^{\nu}_{\nu} = R,$$

katakanlah. R adalah skalar dan disebut kelengkungan skalar atau kelengkungan total. Ini didefinisikan dalam cara demikian sehingga R bernilai positip untuk permukaan bola dalam tiga dimensi, sebagaimana dapat kita periksa dengan perhitungan langsung.

Relasi Bianchi (13.4) mencangkup lima sufiks. Misalkan kita mengkonstraksi sufiks tersebut dua kali dan memperoleh relasi dengan satu sufiks non boneka. Ajukan $\tau = \alpha$

dan kalikan dengan $g^{\mu\rho}$. Hasilnya adalah

$$g^{\mu\rho}(R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\alpha} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha:\rho} + R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho:\sigma}) = 0$$

atau

$$(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{:\alpha} + (g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha})_{:\rho} + (g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho})_{:\sigma} = 0. \tag{14.2}$$

Sekarang

$$g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\rho\sigma} = g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\mu\beta\sigma\rho} = g^{\alpha\beta}R_{\beta\sigma} = R^{\alpha}_{\sigma}.$$

Kita dapat menulis R^{α}_{σ} dengan sufiks-sufiks, satu sufiks di atas sufiks lain pada perhitungan $R_{\alpha\sigma}$ menjadi simetri. Persamaan (14.2) sekarang menjadi

$$R^{\alpha}_{\sigma:\alpha} + (g^{\mu\rho}R_{\mu\sigma})_{:\rho} - R_{:\sigma} = 0$$

atau

$$2R^{\alpha}_{\sigma:\alpha} - R_{:\sigma} = 0,$$

adalah relasi Bianci untuk tensor Ricci. Jika kita menaikkan sufiks σ, kita memperoleh

$$(R^{\sigma\alpha} - \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}R)_{:\alpha} = 0. \tag{14.3}$$

Pernyataan eksplisit untuk tensor Ricci adalah, dari (11.3)

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{14.4}$$

Suku pertama di sini tidak muncul menjadi simetri dalam μ dan ν, meskipun tiga suku lain dengan nyata muncul. Untuk mengukuhkan bahwa suku pertama adalah sungguh simetri kita memerlukan sedikit kalkulasi.

Untuk mendiferensiasi determinan g kita harus mendiferensiasi tiap-tiap elemen $g_{\lambda\mu}$ di dalamnya dan kemudian mengalikan dengan kofaktor $gg^{\lambda\mu}$. Jadi

$$g_{,\nu} = gg^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu}. \tag{14.5}$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} &= g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda\nu\mu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2}g^{-1}g_{,\nu} = \frac{1}{2}(\log\, g)_{,\nu}.\end{aligned} \tag{14.6}$$

Ini membuat nyata, suku pertama (14.4) adalah simetri.

Bab 15

Hukum Gravitasi Einstein

Hingga saat ini pekerjaan kita seluruhnya adalah matematika murni (terpisah dari asumsi fisis bahwasannya lintasan partikel adalah geodesik). Ini telah dilakukan utamanya pada abad yang lalu dan diterapkan ke ruang lengkung dalam sembarang jumlah dimensi. Tempat dimana jumlah dimensi akan muncul dalam formalisme adalah dalam persamaan

$$g^{\mu}_{\mu} = \text{jumlah dimensi.}$$

Einstein membuat asumsi, dalam ruang kosong

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{15.1}$$

Relasi ini memenuhi hukum gravitasinya. "Kosong" disini berarti tak ada materi yang hadir dan tak ada medan fisis kecuali medan gravitasi. Medan gravitasi tidak mengganggu kekosongan. Medan yang lain mengganggu kekosongan. Syarat ruang kosong berlaku dalam aproksimasi yang baik untuk ruang antar planet dalam sistem matahari dan persamaan (15.1) berlaku di sana.

Ruang datar dengan nyata memenuhi (15.1). Geodesik adalah garis lurus, sehingga partikel bergerak sepanjang garis lurus. Dimana ruang tidak datar, hukum Einstein mengajukan pembatasan pada kelengkungan. Dikombinasi dengan asumsi, planet-planet bergerak sepanjang geodesik, ini memberi informasi tentang gerak mereka.

Pada pandangan pertama hukum gravitasi Einstein tidak nampak seperti hukum gravitasi Newton. Untuk melihat keserupaannya, kita harus melihat $g_{\mu\nu}$ sebagai *potensial* yang menggambarkan medan gravitasi. Terdapat sepuluh darinya, sebagai ganti hanya satu potensial dari teori Newton. Mereka menggambarkan tak hanya medan gravitasi, tetapi juga sistem koordinat. Medan gravitasi dan sistem koordinat tercampur padu dalam teori Einstein, dan kita tak dapat mendeskripsikan salah satu tanpa yang lain.

Amati $g_{\mu\nu}$ sebagai potensial, kita menemukan bahwa (15.1) muncul sebagai persamaan medan. Mereka seperti persamaan medan biasa dalam orde kedua, karena turunan kedua muncul dalam (14.4), sebagaimana simbol Christoffel mencangkup turunan pertama. Mereka tak seperti persamaan medan biasa yakni mereka tak linier; jauh dari itu. Ketaklinieran berarti, persamaan-persamaan adalah kompleks dan rumit untuk diperoleh solusi akurat.

Bab 16

Aproksimasi Newtonian

Marilah kita tinjau medan gravitasi statik dan merujuk medan gravitasi statik tersebut terhadap sistem koordinat statik. $g_{\mu\nu}$ kemudian konstan terhadap waktu, $g_{\mu\nu,0} = 0$. Lebih jauh, kita harus memiliki

$$g_{m0} = 0, \quad (m = 1, 2, 3).,$$

Ini menuju

$$g^{m0} = 0, \quad g^{00} = (g_{00})^{-1},$$

dan g^{mn} adalah matriks resiprok terhadap g_{mn}. Sufiks roman seperti m dan n selalu mengambil nilai $1, 2, 3$. Kita menemukan bahwa $\Gamma_{m0n} = 0$, dan oleh karena itu juga $\Gamma^m_{0n} = 0$.

Misalkan kita mengambil sebuah partikel yang bergerak lambat, dibanding kecepatan cahaya. Maka v^m adalah kuantitas kecil, orde pertama. Dengan mengabaikan kuantitas orde kedua,

$$g_{00} v^{0^2} = 1. \tag{16.1}$$

Partikel akan bergerak sepanjang geodesik. Dengan mengabaikan kuantitas orde kedua, persamaan (8.3) menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{dv^m}{ds} &= -\Gamma^m_{00} v^{0^2} = -g^{mn} \Gamma_{n00} v^{0^2} \\ &= \frac{1}{2} g^{mn} g_{00,n} v^{0^2}. \end{aligned}$$

Sekarang

$$\frac{dv^m}{ds} = \frac{dv^m}{dx^\mu}\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dv^m}{dx^0}v^0$$

terhadap orde pertama. Jadi

$$\frac{dv^m}{dx^0} = \frac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}v^0 = g^{mn}({g_{00}}^{1/2})_{,n} \tag{16.2}$$

dengan bantuan (16.1). Karena $g_{\mu\nu}$ tak gayut x^0, kita dapat menurunkan sufiks m disini dan memperoleh

$$\frac{dv_m}{dx^0} = ({g_{00}}^{1/2})_{,m}. \tag{16.3}$$

Kita melihat, seakan-akan partikel bergerak dalam pengaruh potensial ${g_{00}}^{1/2}$. Kita tidak menggunakan hukum Einstein untuk memperoleh hasil ini. Kita sekarang menggunakan hukum Einstein untuk memperoleh syarat bagi potensial, sehingga itu dapat dibandingkan dengan hukum Newton.

Misalkan kita anggap medan gravitasi lemah, sehingga kelengkungan ruang adalah kecil. Maka kita dapat memilih sistem koordinat kita sehingga kelengkungan garis koordinat (masing-masing dengan tiga konstanta x) adalah kecil. Dalam syarat ini $g_{\mu\nu}$ secara aproksimasi konstan, dan $g_{\mu\nu,\sigma}$ dan seluruh simbol Christoffel adalah kecil. Jika kita menghitung mereka dari orde pertama dan mengabaikan kuantitas orde kedua, hukum Einstein (15.1) menjadi, dari (14.4)

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} = 0.$$

Kita dapat mengevaluasi hal ini sangat tepat dengan mengkonstraksi (11.6) dengan ρ dan μ dipertukarkan dan abaikan suku-suku orde kedua. Hasilnya adalah

$$g^{\rho\sigma}(g_{\rho\sigma,\mu\nu} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0. \tag{16.4}$$

Sekarang ambil $\mu = \nu = 0$ dan gunakan syarat, $g_{\mu\nu}$ tak gayut x^0. Kita memperoleh

$$g^{mn}g_{00,mn} = 0. \tag{16.5}$$

Persamaan d'Alembert (10.9) menjadi, dalam aproksimasi medan lemah,

$$g^{\mu\nu}V_{,\mu\nu} = 0.$$

Dalam kasus statik persamaan ini mereduksi ke persamaan Laplace

$$g^{mn}V_{,mn} = 0.$$

Persamaan (16.5) hanya mengatakan pada kita, g_{00} memenuhi persamaan Laplace.

Kita dapat memilih satuan waktu kita sehingga g_{00} secara aproksimasi adalah satuan. Kemudian kita dapat mengajukan

$$g_{00} = 1 + 2V, \tag{16.6}$$

dengan V kecil. Kita memperoleh $g_{00}^{1/2} = 1+V$ dan V menjadi potensial. Ini memenuhi persamaan Laplace, sehingga V ini dapat diidentifikasi dengan potensial Newtonian, sama dengan $-m/r$ untuk massa m pada titik asal. Untuk memeriksa tanda, kita lihat (16.2) menuju

$$\text{percepatan} = -\text{grad } V,$$

karena g^{mn} memiliki elemen diagonal secara aproksimasi -1.

Kita melihat, hukum gravitasi Einstein menuju hukum gravitasi Newton ketika medan lemah dan ketika medan statik. Sukses teori Newton dalam penjelasan gerak planet-planet dapat jadinya dipertahankan. Aproksimasi statik adalah sesuatu yang bagus karena kecepatan planet-planet adalah kecil dibanding dengan kecepatan cahaya. Aproksimasi medan lemah adalah aproksimasi yang bagus karena ruang sangat dekat datar. Marilah kita tinjau beberapa orde besarnya.

Nilai $2V$ pada permukaan bumi menjadi orde 10^{-9}. Jadi g_{00} yang diberikan oleh (16.6) sangat dekat dengan 1. Bahkan, perbedaannya dari 1 cukup besar untuk menghasilkan efek gravitasi yang penting yang kita lihat di bumi. Ambil jari-jari bumi berorde 10^9 cm, kita menemukan bahwa $g_{00,m}$ berorde 10^{-18}cm^{-1}. Keberangkatan dari kedataran jadinya secara ekstrim kecil. Akan tetapi, ini harus dikalikan dengan kuadrat kecepatan cahaya, katakanlah $9\times10^{20}(cm/sec)^2$, untuk memberikan percepatan dikarenakan gravitasi pada permukaan bumi. Jadi percepatan ini, sekitar $10^3\ cm/sec^2$, cukup layak, meskipun keberangkatan dari kedataran jauh begitu kecil untuk diamati secara langsung.

Bab 17

Pergeseran Merah Gravitasi

Marilah kita mengambil lagi medan gravitasi statik dan meninjau sebuah atom dalam keadaan diam, memancarkan radiasi monokromatik. Panjang gelombang cahaya terkait dengan Δs tertentu. Karena atom dalam keadaan diam, kita memiliki, untuk sistem koordinat statik sebagaimana dalam Bab 16,

$$\Delta s^2 = g_{00} \Delta x^{0^2},$$

dimana Δx^0 adalah periode, yakni, waktu antara puncak-puncak gelombang berurutan merujuk pada sistem koordinat statik kita.

Jika cahaya menjalar ke tempat lain, Δx^0 akan tetap konstan. Δx^0 ini tak akan menjadi sama sebagaimana periode garis spektral yang sama diemisikan atom lokal, yang akan menjadi Δs lagi. Periode gayut potensial gravitasi g_{00} di tempat cahaya diemisikan:

$$\Delta x^0 :: {g_{00}}^{-1/2}.$$

Garis spektral akan digeser dengan faktor ${g_{00}}^{-1/2}$ ini.

Jika kita menggunakan aproksimasi Newtonian (16.6), kita memperoleh

$$\Delta x^0 :: 1 - V.$$

V akan menjadi negatip di tempat medan gravitasi kuat, seperti permukaan matahari, sehingga cahaya yang diemisikan bergeser merah ketika dibandingkan dengan cahaya terkait yang diemisikan di bumi. Efek ini dapat diamati dengan cahaya matahari, tetapi agaknya tertutupi oleh efek fisis lain, semisal efek Doppler yang muncul dari gerak atom beremisi. Efek pergeseran merah menjadi lebih baik diamati dengan cahaya yang diemisikan bintang katai putih (*white dwarf star*), dimana kerapatan materi yang tinggi dalam bintang menaikkan potensial gravitasi yang sangat kuat pada permukaannya.

Bab 18

Solusi Schwarzschild

Persamaan Einstein untuk ruang kosong adalah persamaan tak linier, karena itu sangat kompleks, dan sulit diperoleh solusi akurat persamaan tersebut. Terdapat, bagaimanapun, satu kasus khusus yang dapat disolusi tanpa terlalu banyak kesulitan; disebut, medan simetri bola statik yang dihasilkan oleh benda simetri bola dalam keadaan diam.

Syarat statik berarti, dengan sistem koordinat statik, $g_{\mu\nu}$ tak gayut waktu x^0 atau t dan juga $g_{0m} = 0$. Koordinat ruang dapat diambil menjadi koordinat kutub bola $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$. Bentuk paling umum ds^2 yang sesuai dengan simetri bola adalah

$$ds^2 = U\ dt^2 - V\ dr^2 - Wr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2),$$

dimana U, V, dan W hanya fungsi r. Kita dapat mengganti r dengan sembarang fungsi r tanpa mengganggu simetri bola. Kita menggunakan kebebasan ini untuk menyederhanakan segala sesuatunya sebanyak mungkin, dan susunan yang paling sesuai adalah yang memiliki $W = 1$. Pernyataan untuk ds^2 kemudian dapat ditulis

$$ds^2 = e^{2\nu}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\ d\phi^2, \tag{18.1}$$

dengan ν dan λ hanya fungsi r. Mereka harus dipilih untuk memenuhi persamaan Einstein.

Kita dapat membaca nilai $g_{\mu\nu}$ dari (18.1), katakanlah,

$$g_{00} = e^{2\nu}, \quad g_{11} = -e^{-2\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta,$$

dan

$$g_{\mu\nu} = 0 \ \text{ untuk } \ \mu \neq \nu.$$

Kita menemukan

$$g^{00} = e^{-2\nu}, \quad g^{11} = -e^{-2\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta,$$

dan

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{untuk} \quad \mu \neq \nu.$$

Sekarang perlu menghitung simbol Christoffel $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$. Banyak simbol tersebut yang lenyap. Salah satu simbol yang tidak lenyap adalah, dengan aksen yang menyatakan turunan terkait r,

$$\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2\nu - 2\lambda} \qquad \Gamma^0_{10} = \nu'$$

$$\Gamma^1_{11} = \lambda' \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = r^{-1}$$

$$\Gamma^1_{22} = -re^{-2\lambda} \qquad \Gamma^3_{23} = \cot\ \theta$$

$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\ e^{-2\lambda} \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\ \theta\ \cos\ \theta.$$

Pernyataan-pernyataan ini disubstitusi ke dalam (14.4). Hasilnya adalah

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right) e^{2\nu - 2\lambda}, \tag{18.2}$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \tag{18.3}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 \tag{18.4}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta,$$

dengan komponen lain dari $R_{\mu\nu}$ lenyap.

Hukum gravitasi Einstein menghendaki pernyataan-pernyataan ini lenyap. Pelenyapan (18.2) dan (18.3) merujuk

$$\lambda' + \nu' = 0.$$

Untuk nilai besar r, ruang secara aproksimasi harus menjadi datar, sehingga λ dan ν keduanya menuju nol ketika $r \to \infty$. Ini mengikuti bahwa

$$\lambda + \nu = 0.$$

Pelenyapan (18.4) sekarang memberikan

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1$$

atau

$$(re^{2\nu})' = 1.$$

Jadi

$$re^{2\nu} = r - 2m,$$

dimana m adalah konstanta integrasi. Ini juga membuat (18.2) dan (18.3) lenyap. Sekarang kita peroleh

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}. \tag{18.5}$$

Aproksimasi Newtonian harus berlaku untuk nilai r besar. Bandingkan (18.5) dengan (16.6), kita melihat konstanta integrasi m yang muncul dalam (18.5) hanya massa pusat benda yang menghasilkan medan gravitasi.

Solusi lengkap adalah

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\ d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\ d\phi^2. \tag{18.6}$$

Ini dikenal sebagai solusi Schwarzschild. Solusi ini berlaku di luar permukaan benda yang menghasilkan medan, dimana tak ada materi. Jadi, solusi ini berlaku cukup akurat di luar permukaan bintang.

Solusi (18.6) menunjukkan koreksi kecil dalam teori Newton untuk gerak planet mengelilingi Matahari. Koreksi ini cukup besar hanya dalam kasus Merkurius, planet terdekat, dan koreksi ini menjelaskan ketaksesuaian gerak planet ini dengan teori Newton. Jadi koreksi tersebut memberi penegasan yang kuat teori Einstein.

Bab 19

Lubang Hitam

Solusi (18.6) menjadi singular pada $r = 2m$, karena kemudian $g_{00} = 0$ dan $g_{11} = -\infty$. Ini akan nampak, $r = 2m$ menyatakan jari-jari minimum bagi benda bermassa m. Tetapi penelitian lebih dekat menunjukkan, hal ini tidaklah demikian.

Tinjau sebuah partikel yang jatuh menuju pusat benda dan misalkan vektor kecepatan adalah $v^\mu = dz^\mu/ds$. Marilah kita anggap, benda tersebut jatuh secara radial, sehingga $v^2 = v^3 = 0$. Gerak ditentukan oleh persamaan geodesik (8.3):

$$\begin{aligned} \frac{dv^0}{ds} &= -\Gamma^0_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = -g^{00}\Gamma_{0\mu\nu} v^\mu v^\nu \\ &= -g^{00} g_{00,1} v^0 v^1 = -g^{00} \frac{dg_{00}}{ds} v^0. \end{aligned}$$

Sekarang $g^{00} = 1/g_{00}$, sehingga kita memperoleh

$$g_{00}\frac{dv^0}{ds} + \frac{dg_{00}}{ds} v^0 = 0.$$

Ini mengintegrasi terhadap

$$g_{00} v^0 = k,$$

dengan konstanta k. Ini adalah nilai g_{00} dimana partikel mulai jatuh.

Lagi, kita memiliki

$$1 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = g_{00} v^{0^2} + g_{11} v^{1^2}.$$

Kalikan persamaan ini dengan g_{00} dan gunakan $g_{00}g_{11} = -1$, yang kita peroleh dalam bab terakhir, kita menemukan

$$k^2 - {v^1}^2 = g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}.$$

Untuk benda jatuh $v^1 < 0$, dan oleh karena itu

$$v^1 = -\left(k^2 - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{1/2}$$

Sekarang

$$\frac{dt}{dr} = \frac{v^0}{v^1} = -k\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(k^2 - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1/2}.$$

Misalkan kita anggap partikel dekat dengan jari-jari kritis, sehingga $r = 2m + \varepsilon$ dengan ε kecil, dan misalkan kita abaikan ε^2. Maka

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{2m}{\varepsilon} = -\frac{2m}{r - 2m}.$$

Ini mengintegrasi terhadap

$$t = -2m\log(r - 2m) + \text{konstanta}.$$

Jadi, ketika $r \to 2m,\ t \to \infty$. Partikel mengambil waktu tak hingga untuk mencapai jari-jari kritis $r = 2m$.

Misalkan kita anggap partikel mengemisikan cahaya dengan garis spektral tertentu, dan teramati oleh pengamat pada nilai r besar. Cahaya digeser merah dengan faktor ${g_{00}}^{-1/2} = (1 - 2m/r)^{-1/2}$. Faktor ini menjadi tak hingga ketika partikel mendekati jari-jari kritis. Seluruh proses fisis pada partikel akan teramati menjadi lebih dan lebih lambat ketika partikel mendekati $r = 2m$.

Sekarang tinjau seorang pengamat bergerak dengan partikel. Skala waktunya diukur dengan ds. Sekarang

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{v^1} = -\left(k^2 - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1/2},$$

dan hal ini menuju $-k^{-1}$ ketika r menuju $2m$. Jadi partikel mencapai $r = 2m$ setelah selang waktu proper terbatas bagi pengamat. Pengamat yang bergerak berumur terbatas ketika ia mencapai $r = 2m$. Apa yang akan terjadi terhadapnya setelah itu

? Dia dapat melanjutkan pelayaran melalui ruang kosong ke dalam nilai r yang lebih kecil.

Untuk menguji kontinuasi solusi Schwarzschild terhadap nilai $r < 2m$, perlu digunakan sistem koordinat tak statik, sehingga kita memiliki $g_{\mu\nu}$ yang berubah-ubah dengan koordinat waktu. Kita mempertahankan koordinat θ dan ϕ tak berubah, tetapi sebagai ganti t dan r kita gunakan τ dan ρ, didefinisikan dengan

$$\tau = t + f(r), \quad \rho = t + g(r), \tag{19.1}$$

dimana fungsi f dan g adalah pada penyelesaian kita.

Kita memiliki, dengan menggunakan lagi aksen untuk menyatakan turunan berkaitan dengan r,

$$\begin{aligned} d\tau^2 - \frac{2m}{r}d\rho^2 &= (dt + f'dr)^2 - \frac{2m}{r}(dt + g'dr)^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + 2\left(f' - \frac{2m}{r}g'\right)dtdr + \left(f'^2 - \frac{2m}{r}g'^2\right)dr^2 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2. \end{aligned} \tag{19.2}$$

jika kita memilih fungsi f dan g untuk memenuhi

$$f' = \frac{2m}{r}g' \tag{19.3}$$

dan

$$\frac{2m}{r}g'^2 - f'^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \tag{19.4}$$

Eliminasi f dari persamaan-persamaan ini menghasilkan

$$g' = \left(\frac{r}{2m}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \tag{19.5}$$

Untuk mengintegrasikan persamaan ini, ajukan $r = y^2$ dan $2m = a^2$. Dengan $r > 2m$ kita memiliki $y > a$. Kita sekarang memiliki

$$\frac{dg}{dy} = 2y\frac{dg}{dr} = \frac{2y^4}{a}\frac{1}{y^2 - a^2},$$

yang menghasilkan

$$g = \frac{2}{3a}y^3 + 2ay - a^2\log\frac{y + a}{y - a}. \tag{19.6}$$

Akhirnya, kita memperoleh dari (19.3) dan (19.5)

$$g' - f' = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) g' = \left(\frac{r}{2m}\right)^{1/2},$$

yang mengintegrasi dengan

$$\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2m}} r^{3/2} = g - f = \rho - \tau. \tag{19.7}$$

Jadi

$$r = \mu(\rho - \tau)^{2/3}, \tag{19.8}$$

dengan

$$\mu = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2m}\right)^{2/3}.$$

Dalam cara ini kita melihat bahwa kita dapat memenuhi syarat (19.3) dan (19.4) dan juga kita dapat menggunakan (19.2). Substitusikan ke dalam solusi Schwarzschild (18.6), kita memperoleh

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{2m}{\mu(\rho - \tau)^{2/3}}\, d\rho^2 - \mu^2(\rho - \tau)^{4/3}(d\theta^2 + \sin^2\ \theta d\phi^2). \tag{19.9}$$

Nilai kritis $r = 2m$ berkaitan, dari (19.7), hingga $\rho - \tau = 4m/3$. Tak ada singularitas dalam metrik (19.9).

Kita tahu, metrik (19.9) memenuhi persamaan Einstein untuk ruang kosong dalam daerah $r > 2m$, karena metrik ini dapat ditransformasi ke solusi Schwarzschild dengan perubahan koordinat belaka. Kita dapat menyimpulkan, metrik ini memenuhi persamaan Einstein juga untuk $r \leq 2m$ dari kontinuitas analitik, karena metrik ini tidak mencangkup sembarang singularitas pada $r = 2m$. Ini dapat berlanjut untuk berlaku benar sampai $r = 0$ atau $\rho - \tau = 0$.

Singularitas muncul dalam hubungan antara koordinat baru dan koordinat mula-mula, persamaan (19.1). Tetapi sekali kita mengukuhkan sistem koordinat baru kita dapat mengabaikan sistem koordinat sebelumnya dan singularitas tak lagi muncul.

Kita melihat, solusi Schwarzschild untuk ruang kosong dapat diperluas menuju daerah $r < 2m$. Tetapi daerah ini tak dapat berkomunikasi dengan ruang $r > 2m$. Sembarang sinyal, bahkan sinyal cahaya, akan mengambil waktu tak hingga untuk melintasi batas $r = 2m$, sebagaimana dapat dengan mudah kita periksa. Jadi, kita tak dapat memiliki pengetahuan observasi langsung dari daerah $r < 2m$. Daerah demikian disebut lubang hitam, karena segala sesuatu dapat runtuh ke dalamnya (ambil waktu tak hingga, dengan jam kita, untuk melakukan itu) tetapi tak ada yang dapat keluar.

Pertanyaan muncul, apakah daerah demikian dapat sungguh-sungguh ada. Seluruh yang dapat kita katakan secara definitif adalah persamaan Einstein memperkenankannya. Objek stelar masif dapat runtuh berjari-jari sangat kecil dan gaya gravitasinya kemudian begitu kuat, sehingga tak ada gaya fisis yang dikenal dapat mempertahankan mereka dalam pengendalian dan mencegah keruntuhan lebih lanjut. Ini akan nampak bahwa itu harus runtuh ke dalam lubang hitam. Ini akan mengambil waktu tak hingga untuk melakukan yang demikian dengan jam kita, tetapi hanya waktu berhingga secara relatif menuju keruntuhan materi itu sendiri.

Bab 20

Rapat Tensor

Dengan transformasi koordinat, elemen volume berdimensi empat mentransformasi menurut hukum

$$dx^{0'}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'} = dx^0\ dx^1\ dx^2\ dx^3\ J, \tag{20.1}$$

dimana J adalah Jacobian

$$J = \frac{\partial(x^{0'}x^{1'}x^{2'}x^{3'})}{\partial(x^0x^1x^2x^3)} = \text{determinan dari } x^{\mu'}_{,\alpha}.$$

Kita dapat menulis (20.1)

$$d^4x' = J\ d^4x \tag{20.2}$$

sebagai ringkasan.

Sekarang

$$g_{\alpha\beta} = x^{\mu'}_{,\alpha} g_{\mu'\nu'} x^{\nu'}_{,\beta}.$$

Kita dapat memandang sisi kanan sebagai perkalian tiga matriks, matriks pertama memiliki baris yang ditentukan dengan α dan kolom ditentukan dengan μ', matriks kedua memiliki baris yang ditentukan dengan μ' dan kolom dengan ν', dan matriks ketiga memiliki baris yang ditentukan dengan ν' dan kolom dengan β. Perkalian ini menyamakan matriks $g_{\alpha\beta}$ pada sisi kiri. Persamaan terkait harus berlaku antar determinan; oleh karena itu

$$g = J\ g'\ J$$

atau

$$g = J^2 g'.$$

Sekarang g adalah sebuah kuantitas negatip, sehingga kita dapat membentuk $\sqrt{-g}$, ambil nilai positip untuk akar kuadrat. Jadi

$$\sqrt{-g} = J\sqrt{-g'}. \tag{20.3}$$

Anggap S adalah sebuah kuantitas medan skalar, $S = S'$. Maka

$$\int S\sqrt{-g}\ d^4x = \int S\sqrt{-g'}\ Jd^4x = \int S'\sqrt{-g'}\ d^4x',$$

jika daerah integrasi untuk x' berhubungan dengan x. Jadi

$$\int S\sqrt{-g}\ d^4x = \text{invarian}. \tag{20.4}$$

Kita menyebut $S\sqrt{-g}$ sebagai rapat skalar, berarti suatu kuantitas yang integralnya invarian.

Dengan cara serupa, untuk sembarang medan tensor $T^{\mu\nu\cdots}$ kita dapat menyebut $T^{\mu\nu\cdots}\sqrt{-g}$ sebagai rapat tensor. Integral

$$\int T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ d^4x$$

adalah tensor jika daerah asal integrasi kecil. Ini bukan tensor, jika daerah asal integrasi tidak kecil, karena tensor ini kemudian terdiri dari penjumlahan tensor-tensor yang ditempatkan pada titik-titik berbeda dan titik-titik tersebut tidak mentransformasi dengan sembarang cara yang sederhana dalam transformasi koordinat.

Kuantitas $\sqrt{-g}$ akan banyak digunakan nanti. Sebagai ringkasan kita akan menulis kuantitas tersebut secara sederhana sebagai $\surd$. Kita memiliki

$$g^{-1}g_{,\nu} = 2\surd^{-1}\surd_{,\nu}.$$

Jadi formula (14.5) memberi

$$\surd_{,\nu} = \frac{1}{2}\surd g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu} \tag{20.5}$$

dan formula (14.6) dapat ditulis

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\surd = \surd_{,\nu}. \tag{20.6}$$

Bab 21

Teorema Gauss dan Stokes

Vektor A^μ memiliki divergensi kovarian $A^\mu{}_{:\mu}$, sebuah skalar. Kita memiliki

$$A^\mu{}_{:\mu} = A^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu} A^\nu = A^\mu_{,\mu} + \surd^{-1} \surd_{,\nu} A^\nu.$$

Jadi

$$A^\mu_{:\mu} \surd = (A^\mu \surd)_{,\mu}. \tag{21.1}$$

Kita dapat mengajukan $A^\mu{}_{:\mu}$ untuk S dalam (20.4), dan kita memperoleh invarian

$$\int A^\mu_{:\mu} \surd d^4x = \int (A^\mu \surd)_{,\mu} d^4x.$$

Jika integral diambil meliputi volume berhingga (empat dimensi), sisi kanan dapat diubah oleh teorema Gauss menjadi integral permukaan batas tiga dimensi) dari suatu volume.

Jika $A^\mu{}_{:\mu} = 0$, kita memiliki

$$(A^\mu \surd)_{,\mu} = 0 \tag{21.2}$$

dan relasi ini memberi kita hukum kekekalan; katakanlah, kekekalan fluida yang kerapatannya $A^0 \surd$ dan alirannya diberikan oleh vektor tiga dimensi $A^m \surd (m = 1, 2, 3)$. Kita dapat mengintegrasi (21.2) meliputi suatu volume V tiga dimensi terbentang pada waktu tertentu x^0. Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \left(\int A^0 \surd \; d^3x \right)_{,0} &= -\int (A^m \surd)_{,m} d^3x \\ &= \text{integral permukaan pada batas V.} \end{aligned}$$

Jika tak ada arus yang melintasi batas V, $\int A^0 \surd\, d^3x$ adalah konstan.

Hasil ini untuk vektor A^μ tak dapat diambil menjadi suatu tensor dengan lebih dari satu sufiks, secara umum. Ambil sebuah tensor dua sufiks $Y^{\mu\nu}$. Dalam ruang datar kita dapat menggunakan teorema Gauss untuk menyatakan $\int Y^{\mu\nu}{}_{,\nu} d^4x$ sebagai integral permukaan, tetapi dalam ruang lengkung kita tak dapat, secara umum, menyatakan $\int Y^{\mu\nu}{}_{:\nu} \surd d^4x$ sebagai integral permukaan. Perkecualian terjadi untuk tensor antisimetri $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.

Dalam hal ini kita memiliki

$$F^{\mu\nu}{}_{:\sigma} = F^{\mu\nu}{}_{,\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} F^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho} F^{\mu\rho},$$

sehingga

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{:\nu} &= F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} F^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\nu\rho} F^{\mu\rho} \\ &= F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \surd^{-1} \surd_{,\rho}\, F^{\mu\rho} \end{aligned}$$

dari (20.6). Jadi

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} \surd = (F^{\mu\nu} \surd)_{,\nu}. \tag{21.3}$$

Oleh karena itu $\int F^{\mu\nu}{}_{:\nu} \surd d^4x$ = sebuah integral permukaan, dan jika $F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$ kita memiliki hukum kekekalan.

Dalam hal simetri $Y^{\mu\nu} = Y^{\nu\mu}$ kita dapat memperoleh persamaan terkait dengan suku ekstra, asalkan kita meletakkan salah satu sufiks di bawah dan berhubungan dengan $Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu}$. Kita memiliki

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\sigma} = Y_\mu{}^\nu{}_{,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} Y_\alpha{}^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\alpha} Y_\mu{}^\alpha.$$

Ajukan $\sigma = \nu$ dan gunakan (20.6), kita memperoleh

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu} = Y_\mu{}^\nu{}_{,\nu} + \surd^{-1} \surd_{,\alpha} Y_\mu{}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu\nu} Y^{\alpha\nu}.$$

Karena $Y^{\alpha\nu}$ adalah simetri, kita dapat mengganti $\Gamma_{\alpha\mu\nu}$ dalam suku terakhir dengan

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\nu\mu} + \Gamma_{\nu\alpha\mu}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\nu,\mu}$$

dari (7.6). Jadi kita memperoleh

$$Y_{\mu\ :\nu}^{\ \nu}\sqrt{} = (Y_\mu^{\ \nu}\sqrt{})_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\mu}Y^{\alpha\beta}\sqrt{}. \tag{21.4}$$

Untuk vektor kovarian A_μ, kita memiliki

$$A_{\mu:\nu} - A_{\nu:\mu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho - (A_{\nu,\mu} - \Gamma^\rho_{\nu,\mu}A_\rho) = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \tag{21.5}$$

Hasil ini dapat dinyatakan: curl kovarian sama dengan curl biasa. Ini berlaku hanya untuk vektor kovarian. Untuk vektor kontravarian kita tak dapat membentuk kurl, karena sufiks-sufiks tak akan seimbang.

Misalkan kita ambil $\mu = 1, \nu = 2$. Kita memperoleh

$$A_{1:2} - A_{2:1} = A_{1,2} - A_{2,1}.$$

Misalkan kita mengintegrasikan persamaan ini meliputi suatu luasan permukaan $x^0 =$ konstanta, $x^3 =$ konstanta. Dari teorema Stokes kita peroleh

$$\begin{aligned}\int\int (A_{1:2} - A_{2:1})\ dx^1 dx^2 &= \int\int (A_{1,2} - A_{2,1})\ dx^1 dx^2 \\ &= \int (A_1\ dx^1 + A_2\ dx^2) \end{aligned}\tag{21.6}$$

diintegrasikan meliputi perimeter luasan. Jadi kita memperoleh integral keseluruhan perimeter disamakan terhadap fluks yang melintasi permukaan dibatasi perimeter. Hasil harus berlaku umum dalam seluruh sistem koordinat, tak hanya persamaan permukaan, $x^0 =$ konstanta, $x^3 =$ konstanta.

Untuk memperoleh cara invarian penulisan hasil, kita memperkenalkan formula umum untuk elemen permukaan dua dimensi. Jika kita mengambil dua vektor kontravarian kecil ξ^μ dan ζ^μ, elemen luas permukaan yang mereka bagi ditentukan oleh tensor dua indeks antisimetri

$$dS^{\mu\nu} = \xi^\mu\zeta^\nu - \xi^\nu\zeta^\mu,$$

Jadi, jika ξ^μ memiliki komponen-komponen $0, dx^1, 0, 0,$ dan ζ^μ memiliki komponen $0, 0, dx^2, 0$, maka $dS^{\mu\nu}$ memiliki komponen

$$dS^{12} = dx^1\ dx^2, \quad dS^{21} = -dx^1\ dx^2,$$

dengan komponen-komponen lain lenyap. Sisi sebelah kiri (21.6) menjadi

$$\int\int A_{\mu:\nu} dS^{\mu\nu}.$$

Sisi kanan dengan nyata $\int A_\mu dx^\mu$, sehingga formula menjadi

$$\frac{1}{2}\int\int_{\text{permukaan}} (A_{\mu:\nu} - A_{\nu:\mu})\ dS^{\mu\nu} = \int_{\text{perimeter}} A_\mu\ dx^\mu. \tag{21.7}$$

Bab 22

Koordinat Harmonik

Persamaan d'Alembert untuk sebuah skalar V, katakanlah $\Box V = 0$, memberi, dari (10.9),

$$g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} V_{,\alpha}) = 0. \tag{22.1}$$

Jika kita menggunakan sumbu rektilinier dalam ruang datar, masing-masing koordinat empat x^λ memenuhi $\Box x^\lambda = 0$. Kita dapat mensubstitusi x^λ untuk V dalam (22.1). Hasilnya, tentu, bukan persamaan tensor, karena x^λ bukan skalar seperti V, ini juga hanya berlaku dalam sistem koordinat tertentu. Ini menentukan pembatasan pada koordinat.

Jika kita mensubstitusi x^λ untuk V, maka untuk $V_{,\alpha}$ kita harus mensubstitusi $x^\lambda_{,\alpha} = g^\lambda_\alpha$. Persamaan (22.1) menjadi

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0. \tag{22.2}$$

Koordinat-koordinat yang memenuhi persyaratan ini disebut *koordinat harmonik*. Koordinat harmonik menghasilkan aproksimasi terdekat terhadap koordinat rektilinier yang dapat kita miliki dalam ruang lengkung. Kita dapat menggunakan koordinat harmonik dalam sembarang soal jika kita mengharapkannya, tetapi seringkali koordinat tersebut tidaklah bermanfaat karena sesungguhnya formalisme tensor dengan koordinat umum benar-benar sesuai. Untuk membahas gelombang gravitasi, koordinat harmonik sangat bermanfaat.

Kita memiliki dalam koordinat umum, dari (7.9) dan (7.6),

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha\sigma}) \\ &= -g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} - g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma}. \end{aligned} \tag{22.3}$$

Jadi, dengan bantuan (20.6),

$$(g^{\mu\nu}\surd)_{,\sigma} = (-g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} - g^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta})\surd. \tag{22.4}$$

Konstraksi dengan mengajukan $\sigma = \nu$, kita memperoleh

$$(g^{\mu\nu}\surd)_{,\nu} = -g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}\surd. \tag{22.5}$$

Sekarang kita melihat, bentuk alternatif syarat harmonik adalah

$$(g^{\mu\nu}\surd)_{,\nu} = 0. \tag{22.6}$$

Bab 23

Medan Elektromagnetik

Persamaan Maxwell, sebagaimana biasa ditulis, adalah

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi, \tag{23.1}$$

$$H = \text{curl } A, \tag{23.2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\text{curl } E, \tag{23.3}$$

$$\text{div } H = 0, \tag{23.4}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \text{curl } H - 4\pi j, \tag{23.5}$$

$$\text{div } E = 4\pi\rho. \tag{23.6}$$

Pertama-tama, kita harus mengajukan persamaan Maxwell dalam bentuk empat-dimensi untuk relativitas khusus. Potensial A dan ϕ membentuk vektor-empat κ^μ dalam kesesuaian dengan

$$\kappa^0 = \phi, \quad \kappa^m = A^m, \quad (m = 1, 2, 3).$$

Definisikan

$$F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu}. \tag{23.7}$$

Maka dari (23.1)

$$E^1 = -\frac{\partial \kappa^1}{\partial x^0} - \frac{\partial \kappa^0}{\partial x^1} = \frac{\partial \kappa_1}{\partial x^0} - \frac{\partial \kappa_0}{\partial x^1} = F_{10} = -F^{10}$$

dan dari (23.2)

$$H^1 = \frac{\partial \kappa^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \kappa^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial \kappa_3}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa_2}{\partial x^3} = F_{23} = F^{23}.$$

Jadi enam komponen tensor antisimetri $F_{\mu\nu}$ menentukan kuantitas medan E dan H.

Dari definisi (23.7)

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0. \tag{23.8}$$

Ini menghasilkan persamaan Maxwell (23.3) dan (23.4). Kita memiliki

$$F^{0\nu}{}_{,\nu} = F^{0m}{}_{m} = -F^{m0}{}_{m} = \text{div } E = 4\pi\rho \tag{23.9}$$

dari (23.6). Lagi

$$\begin{aligned} F^{1\nu}{}_{,\nu} = F^{10}{}_{,0} + F^{12}{}_{,2} + F^{13}{}_{,3} &= -\frac{\partial E^1}{\partial x^0} + \frac{\partial H^3}{\partial x^2} - \frac{\partial H^2}{\partial x^3} \\ &= 4\pi j^1. \end{aligned} \tag{23.10}$$

dari (23.5). Rapat muatan ρ dan rapat arus j^m membentuk vektor empat J^μ dalam kesesuaian dengan

$$J^0 = \rho, \quad J^m = j^m.$$

Jadi (23.9) dan (23.10) mengkombinasi dalam

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu. \tag{23.11}$$

Dalam cara ini persamaan Maxwell diajukan dalam bentuk empat-dimensi yang diperlukan oleh relativitas khusus.

Untuk menuju relativitas umum kita harus menuliskan persamaan-persamaan dalam bentuk kovarian. Pada perhitungan (21.5) kita dapat dengan segera menulis (23.7) sebagai

$$F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu:\nu} - \kappa_{\nu:\mu}.$$

Persamaan ini memberi kita definisi kovarian kuantitas medan $F_{\mu\nu}$. Lebih jauh kita memiliki

$$F_{\mu\nu:\sigma} + F_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} F_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} F_{\mu\alpha}.$$

Lakukan permutasi siklik μ, ν, dan σ serta tambahkan tiga persamaan yang didapat, kita memperoleh

$$F_{\mu\nu:\sigma} + F_{\nu\sigma:\mu} + F_{\sigma\mu:\nu} = F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0, \tag{23.12}$$

dari (23.8). Sehingga dengan segera persamaan Maxwell ini berbentuk kovarian.

Akhirnya, kita harus berurusan dengan persamaan (23.11). Persamaan ini bukan persamaan yang benar dalam relativitas umum, dan harus diganti dengan persamaan kovarian

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^{\mu}. \tag{23.13}$$

Dari (21.3), yang diterapkan terhadap sembarang tensor dua sufiks antisimetri, kita memperoleh

$$(F^{\mu\nu}\surd)_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}\surd.$$

Dengan segera ini menuju ke

$$(J^{\mu}\surd)_{,\mu} = (4\pi)^{-1}(F^{\mu\nu}\surd)_{,\mu\nu} = 0.$$

Sehingga kita memiliki persamaan seperti (21.2), yang memberi kita hukum kekekalan kelistrikan. Kekekalan kelistrikan berlaku akurat, tak terganggu kelengkungan ruang.

Bab 24

Modifikasi Persamaan Einstein dengan Kehadiran Materi

Persamaan Einstein dalam ketiadaan materi adalah

$$R^{\mu\nu} = 0. \tag{24.1}$$

Persamaan tersebut menuju

$$R = 0;$$

dan oleh karena itu

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0. \tag{24.2}$$

Jika kita mulai dengan persamaan (24.2), dengan melakukan konstraksi kita peroleh

$$R - 2R = 0$$

dan juga kita dapat kembali ke (24.1). Kita dapat menggunakan (24.1) atau (24.2) sebagai persamaan dasar ruang kosong.

Dalam kehadiran materi persamaan-persamaan ini harus dimodifikasi. Misalkan kita menganggap (24.1) diubah menjadi

$$R^{\mu\nu} = X^{\mu\nu} \tag{24.3}$$

dan (24.2) menjadi

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = Y^{\mu\nu}. \tag{24.4}$$

Disini $X^{\mu\nu}$ dan $Y^{\mu\nu}$ adalah tensor dua indeks simetri yang menunjukkan kehadiran materi.

Kita lihat sekarang, (24.4) adalah bentuk yang lebih sesuai, karena kita memiliki relasi Bianci (14.3), yang mengatakan

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{:\nu} = 0.$$

Oleh karena itu, (24.4) mensyaratkan

$$Y^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0. \tag{24.5}$$

Sembarang tensor $Y^{\mu\nu}$ yang dihasilkan oleh materi harus memenuhi syarat ini; jika tidak, persamaan (24.4) tidak akan konsisten.

Adalah sesuai untuk memasukkan koefisien -8π dan menulis ulang persamaan (24.4) sebagai

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi Y^{\mu\nu}. \tag{24.6}$$

Kita akan menemukan, tensor $Y^{\mu\nu}$ dengan koefisien ini ditafsirkan sebagai rapat dan fluks energi dan momentum (non gravitasi). $Y^{\mu 0}$ adalah rapat dan $Y^{\mu\nu}$ adalah fluks.

Dalam ruang datar, persamaan (24.5) akan menjadi

$$Y^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

dan akan menghasilkan kekekalan energi dan momentum. Dalam ruang lengkung, kekekalan energi dan momentum hanyalah aproksimasi. Kesalahan dianggap berasal dari medan gravitasi yang bekerja terhadap materi dan memiliki dalam dirinya sendiri energi dan momentum.

Bab 25

Tensor Energi Materi

Anggaplah kita memiliki distribusi materi dengan kecepatan bervariasi secara kontinu dari satu titik ke titik lain. Jika z^μ menyatakan koordinat dari elemen materi, kita dapat mengenalkan vektor kecepatan $v^\mu = dz^\mu/ds$, yang akan menjadi fungsi kontinu dari x, seperti fungsi medan. Vektor kecepatan ini memiliki sifat

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1, \tag{25.1}$$

$$\begin{aligned} 0 = (g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)_{:\sigma} &= g_{\mu\nu}(v^\mu v^\nu_{:\sigma} + v^\mu_{:\sigma} v^\nu) \\ &= 2 g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu_{:\sigma}. \end{aligned}$$

Jadi

$$v_\nu v^\nu_{:\sigma} = 0. \tag{25.2}$$

Kita dapat memperkenalkan medan skalar ρ sehingga medan vektor ρv^μ menentukan kerapatan dan aliran materi seperti halnya J^μ menentukan kerapatan dan aliran listrik; katakanlah, $\rho v^0 \surd$ adalah kerapatan dan $\rho v^m \surd$ adalah aliran. Syarat kekekalan materi adalah

$$(\rho v^\mu \surd)_{,\mu} = 0$$

atau

$$(\rho v^\mu)_{:\mu} = 0. \tag{25.3}$$

Materi yang kita tinjau akan memiliki rapat energi $\rho v^0 v^0 \surd$ dan fluks energi $\rho v^0 v^m \surd$, dan dengan cara serupa rapat momentum $\rho v^n v^0 \surd$ dan fluks momentum $\rho v^n v^m \surd$. Ajukan

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu. \tag{25.4}$$

Maka $T^{\mu\nu}\surd$ menghasilkan rapat dan fluks energi dan momentum. $T^{\mu\nu}$ disebut tensor energi materi. Tensor ini, tentunya, simetri.

Dapatkah kita menggunakan $T^{\mu\nu}$ sebagai suku materi di sisi kanan persamaan Einstein (24.6) ? Untuk tujuan ini kita mensyaratkan $T^{\mu\nu}_{:\nu} = 0$. Dari definisi, kita memiliki (25.4)

$$T^{\mu\nu}_{:\nu} = (\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu} = v^\mu (\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu_{:\nu}.$$

Di sini suku pertama lenyap dari syarat kekekalan massa (25.3). Suku kedua lenyap jika materi berpindah sepanjang geodesik, jika v^μ didefinisikan sebagai fungsi medan kontinu disamping memiliki arti hanya pada satu garis dunia, kita memiliki

$$\frac{dv^\mu}{ds} = v^\mu_{,\nu} v^\nu.$$

Sehingga (8.3) menjadi

$$(v^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma) v^\nu = 0$$

atau

$$v^\mu_{:\nu} v^\nu = 0. \tag{25.5}$$

Kita sekarang melihat, kita dapat mensubstitusi tensor energi materi (25.4), dengan koefisien numerik k yang cocok, ke dalam persamaan Einstein (24.4). Kita memperoleh

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = k \rho v^\mu v^\nu. \tag{25.6}$$

Kita sekarang menentukan nilai koefisien k. Kita menuju aproksimasi Newtonian, mengikuti metode dari Bab 16. Kita pertama-tama mencatat, dengan mengkonstraksi (25.6), kita memperoleh

$$-R = k\rho.$$

Sehingga (25.6) dapat ditulis

$$R^{\mu\nu} = k\rho (v^\mu v^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}).$$

Dengan aproksimasi medan lemah kita memperoleh, berkaitan dengan (16.4),

$$\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(g_{\rho\sigma,\mu\nu} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = k\rho(v_\mu v_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}).$$

Kita sekarang mengambil medan statik dan distribusi materi statik, sehingga $v_0 = 1$, $v_m = 0$. Ajukan $\mu = \nu = 0$ dan abaikan kuantitas orde kedua, kita menemukan

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = \frac{1}{2}k\rho$$

atau dari (16.6)

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{2}k\rho.$$

Agar bersesuaian dengan persamaan Poisson kita harus mengambil $k = -8\pi$.

Persamaan Einstein untuk kehadiran distribusi materi dengan medan kecepatan terbaca

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi\rho v^\mu v^\nu. \tag{25.7}$$

Jadi $T^{\mu\nu}$, diberikan oleh (25.4), dengan tepat adalah $Y^{\mu\nu}$ dari persamaan (24.6).

Syarat kekekalan massa (25.3) memberi

$$\rho_{:\mu}v^\mu + \rho v^\mu{}_{:\mu} = 0,$$

oleh karena itu

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\partial\rho}{\partial x^\mu}v^\mu = -\rho v^\mu{}_{:\mu}. \tag{25.8}$$

Ini syarat yang menentukan bagaimana ρ berubah sepanjang garis dunia dari elemen materi. Syarat ini memperkenankan ρ berubah secara sembarang dari garis dunia satu elemen menuju elemen berikutnya. Jadi kita dapat mengambil ρ lenyap kecuali untuk paket garis dunia yang membentuk tabung dalam ruang-waktu. Paket demikian akan menyusun partikel materi berukuran berhingga. Di luar partikel kita memiliki $\rho = 0$, dan persamaan medan Einstein untuk ruang kosong berlaku.

Ini seharusnya dicatat, jika kita mengasumsikan persamaan medan umum (25.7), kita dapat mendeduksi darinya dua hal: (a) massa adalah kekal dan (b) massa bergerak sepanjang geodesik. Untuk melakukan hal ini kita mencatat, bahwa (sisi sebelah kiri)$_{:\nu}$ lenyap dari relasi Bianci, sehingga persamaan menghasilkan

$$(\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu} = 0,$$

atau

$$v^\mu(\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu} = 0. \tag{25.9}$$

Kalikan persamaan ini dengan v_μ. Suku kedua menghasilkan nol dari (25.2) dan kita diberi dengan $(\rho v^\nu)_{:\nu} = 0$, adalah persamaan kekekalan (25.3). Sekarang persamaan (25.9) mereduksi ke $v^\nu v^\mu_{:\nu} = 0$, yakni persamaan geodesik. Tidaklah perlu membuat asumsi terpisah, partikel bergerak sepanjang geodesik. Dengan partikel kecil, gerak dikendala berada di sepanjang geodesik dengan menerapkan persamaan Einstein untuk ruang kosong menuju ruang di sekitar partikel.

Bab 26

Prinsip Aksi Gravitasi

Perkenalkan skalar

$$I = \int R\sqrt{\ } \, d^4x \tag{26.1}$$

integrasi meliputi volume empat-dimensi tertentu. Lakukan variasi kecil $\delta g_{\mu\nu}$ dalam $g_{\mu\nu}$, dengan mempertahankan $g_{\mu\nu}$ dan turunan pertamanya konstan pada batas. Kita akan menemukan, pengajuan $\delta I = 0$ untuk sembarang $\delta g_{\mu\nu}$ menghasilkan persamaan vakum Einstein.

Kita memiliki dari (14.4)

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^* - L,$$

dimana

$$R^* = g^{\mu\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\sigma}) \tag{26.2}$$

dan

$$L = g^{\mu\nu}(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}). \tag{26.3}$$

I mencangkup turunan kedua dari $g_{\mu\nu}$, karena turunan kedua ini terjadi dalam R^*. Tetapi mereka hanya terjadi secara linier, sehingga mereka dapat dipindah dengan integrasi parsial. Kita memiliki

$$R^*\sqrt{\ } = (g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}\sqrt{\ })_{,\nu} - (g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\sigma} - (g^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} + (g^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \tag{26.4}$$

Dua suku pertama adalah diferensial sempurna, sehingga mereka tak akan berkontribusi apa pun terhadap I. Oleh karena itu, kita tetap perlu memakai hanya dua suku terakhir dari (26.4). Dengan bantuan (22.5) dan (22.4) mereka menjadi

$$g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}\surd + (-2g^{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\sigma\beta})\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\surd.$$

Ini hanya $2L\surd$, dari (26.3). Sehingga (26.1) menjadi

$$I = \int L\surd\ d^4x,$$

yang hanya mencangkup $g_{\mu\nu}$ dan turunan pertama mereka. Ini adalah homogen dari tingkat kedua dalam turunan pertama ini.

Ajukan $\mathcal{L} = L\surd$, kita mengambil ini (dengan koefisien numerik yang sesuai, ditentukan kemudian) sebagai rapat aksi untuk medan gravitasi. Ini bukan rapat skalar. Tetapi ini lebih cocok ketimbang $R\surd$, rapat skalar, karena ini tidak mencangkup turunan kedua dari $g_{\mu\nu}$.

Menurut ide lazim dari dinamika, aksi adalah integral waktu dari Lagrangian. Kita memiliki

$$I = \int \mathcal{L}\ d^4x = \int dx_o \int \mathcal{L}\ dx^1\ dx^2\ dx^3$$

sehingga Lagrangian dengan nyata

$$\int \mathcal{L}\ dx^1\ dx^2\ dx^3.$$

Jadi $\mathcal{L}$ dapat ditinjau sebagai rapat Lagrangian (dalam tiga dimensi) sebaik rapat aksi (dalam empat dimensi). Kita dapat memandang $g_{\mu\nu}$ sebagai koordinat dinamik dan turunan waktunya sebagai kecepatan. Kita kemudian melihat, Lagrangian adalah kuadratik (tak homogen) kecepatan, sebagaimana lazimnya dalam dinamika biasa.

Kita sekarang harus mengubah $\mathcal{L}$. Kita memiliki, gunakan (20.6),

$$\begin{aligned}
\delta(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\surd) &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\surd) + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\surd\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \\
&= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\surd_{,\alpha}) + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\delta(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\surd) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\surd) \\
&= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\surd_{,\alpha}) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\nu}\surd)_{,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\surd) \qquad (26.5)
\end{aligned}$$

dengan bantuan (22.5). Lagi

$$\begin{aligned}
\delta(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\surd) &= 2(\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha})\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\surd + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\delta(g^{\mu\nu}\surd) \\
&= 2\delta(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu}\surd)\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\delta(g^{\mu\nu}\surd) \\
&= -\delta(g^{\nu\beta}{}_{,\alpha}\surd)\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\delta(g^{\mu\nu}\surd) \qquad (26.6)
\end{aligned}$$

dengan bantuan (22.3). Kurangkan (26.6) dari (26.5), kita memperoleh

$$\delta\mathcal{L} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\surd)_{,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\nu}\surd)_{,\nu} + (\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})\delta(g^{\mu\nu}\surd). \qquad (26.7)$$

Dua suku pertama di sini berbeda dengan bentuk diferensial sempurna

$$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu\,\alpha}\delta(g^{\mu\nu}\surd) + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu}\delta(g^{\mu\nu}\surd).$$

Sehingga kita memperoleh

$$\delta I = \delta\int\mathcal{L}\ d^4x = \int R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}\surd)\ d^4x, \qquad (26.8)$$

dengan $R_{\mu\nu}$ diberikan oleh (14.4). Dengan $\delta g_{\mu\nu}$ sembarang, kuantitas $\delta(g^{\mu\nu}\surd)$ juga tak gayut dan sembarang, sehingga syarat (26.8) lenyap menuju hukum Einstein dalam bentuk (24.1).

Kita dapat mendeduksi, dengan metode yang sama sebagaimana (7.9), maka

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \qquad (26.9)$$

Juga, berkaitan dengan (20.5), kita dapat mendeduksi

$$\delta\surd = \frac{1}{2}\surd g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \qquad (26.10)$$

Jadi

$$\delta(g^{\mu\nu}\surd) = -(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\surd\delta g_{\alpha\beta}.$$

Sehingga kita dapat menulis (26.8), sebagai ganti,

$$\begin{aligned}
\delta I &= -\int R_{\mu\nu}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\delta g_{\alpha\beta}\ d^4x \\
&= -\int(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)\surd\delta g_{\alpha\beta}\ d^4x. \qquad (26.11)
\end{aligned}$$

Persyaratan (26.11) lenyap menghasilkan hukum Einstein dalam bentuk (24.2).

Bab 27

Aksi Distribusi Kontinu Materi

Kita akan meninjau distribusi kontinu materi yang kecepatannya bervariasi secara kontinu dari satu titik menuju ke titik tetangga, sebagaimana kita lakukan dalam Bab 25. Kita akan menyusun prinsip aksi bagi materi ini dalam interaksinya dengan medan gravitasi dalam bentuk

$$\delta(I_g + I_m) = 0, \tag{27.1}$$

dimana I_g, bagian aksi gravitasi, adalah I dari bab sebelumnya dengan koefisien numerik κ, dan I_m, bagian aksi materi, akan ditentukan sekarang. Syarat (27.1) harus menuju persamaan Einstein (25.7) untuk medan gravitasi dengan kehadiran materi dan persamaan gerak geodesik untuk materi.

Kita akan perlu melakukan variasi sembarang dalam posisi elemen materi untuk melihat bagaimana ini mempengaruhi I_m. Ini membuat pembahasan lebih jelas jika kita pertama-tama meninjau variasi secara murni kinematik, tanpa sembarang acuan terhadap metrik $g_{\mu\nu}$. Terdapat kemudian perbedaan nyata antara vektor kovarian dan kontravarian dan kita tak dapat mentransformasi salah satu menuju yang lain. Kecepatan dideskripsikan dengan perbandingan komponen-komponen vektor kontravarian u^μ, dan ini tak dapat dinormalisasi tanpa membawanya dalam metrik.

Dengan aliran kontinu materi kita memiliki vektor kecepatan u^μ (dengan sebuah faktor pengali tak diketahui) pada tiap-tiap titik. Kita dapat menyusun rapat vektor kontravarian p^μ, terletak dalam arah u^μ, yang menentukan kedua kuantitas aliran dan kecepatannya menurut formula:

$$p^0 \ dx^1 \ dx^2 \ dx^3$$

adalah jumlah materi dalam elemen volume $dx^1 \ dx^2 \ dx^3$ pada waktu tertentu dan

$$p^1 \ dx^0 \ dx^2 \ dx^3$$

adalah jumlah aliran melalui elemen permukaan $dx^2 \ dx^3$ selama interval waktu dx^0. Kita akan mengasumsikan materi kekal, sehingga

$$p^\mu{}_{,\mu} = 0. \tag{27.2}$$

Misalkan kita menganggap tiap-tiap elemen materi dipindahkan dari z^μ menuju $z^\mu + b^\mu$ dengan b^μ kecil. Kita harus menentukan hasil perubahan p^μ pada titik x yang diberikan.

Ambil pertama-tama kasus $b^0 = 0$. Perubahan jumlah materi dalam volume tiga dimensi V tertentu adalah minus jumlah yang dipindahkan melalui batas V:

$$\delta \int_V p^0 \ dx^1 \ dx^2 \ dx^3 = -\int p^0 b^r \ dS_r,$$

$(r = 1, 2, 3)$, dimana dS_r menyatakan elemen batas permukaan V. Kita dapat mentransformasi sisi kanan ke integral volume dengan menggunakan teorema Gauss dan kita menemukan

$$\delta p^0 = -(p^0 b^r)_{,r}. \tag{27.3}$$

Kita harus memperumum hasil ini ke kasus $b^0 \neq 0$. Kita menggunakan syarat, jika b^μ sebanding p^μ, tiap-tiap elemen materi dipindahkan sepanjang garis dunia dan kemudian tak ada perubahan p^μ. Generalisasi (27.3) dengan nyata

$$\delta p^0 = (p^r b^0 - p^0 b^r)_{,r}$$

karena ini bersesuaian dengan (27.3) ketika $b^0 = 0$ dan menghasilkan $\delta p^0 = 0$ ketika b^μ sebanding p^μ. Terdapat formula terkait untuk komponen lain p^μ, sehingga hasil umum adalah

$$\delta p^\mu = (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu}. \tag{27.4}$$

Untuk mendeskripsikan aliran materi secara kontinu, kuantitas p^μ adalah variabel dasar yang digunakan dalam fungsi aksi. Mereka harus divariasi dalam kesesuaian dengan formula (27.4), dan kemudian, setelah integrasi parsial yang sesuai, kita harus mengajukan koefisien dari tiap-tiap b^μ sama dengan nol. Ini akan memberi kita persamaan gerak materi.

Aksi untuk partikel terisolasi bermassa m adalah

$$-m\int ds. \tag{27.5}$$

Kita melihat keperluan untuk koefisien $-m$ dengan mengambil kasus relativitas khusus, yang Lagrangiannya akan menjadi turunan waktu dari (27.5), katakanlah

$$L = -m\frac{ds}{dx^0} = -m\left(1 - \frac{dx^r}{dx^0}\frac{dx^r}{dx^0}\right)^{1/2},$$

dijumlahkan untuk $r = 1, 2, 3$. Ini menghasilkan momentum

$$\frac{\partial L}{\partial(dx^r/dx^0)} = m\frac{dx^r}{dx^0}\left(1 - \frac{dx^n}{dx^0}\frac{dx^n}{dx^0}\right)^{-1/2} = m\frac{dx^r}{ds},$$

sebagaimana hal ini seharusnya terjadi.

Kita memperoleh aksi untuk distribusi kontinu materi dari (27.5) yakni mengganti m dengan $p^0\ dx^1\ dx^2\ dx^3$ dan integrasikan; jadi

$$I_m = -\int p^0\ dx^1\ dx^2\ dx^3\ ds. \tag{27.6}$$

Untuk memperoleh persamaan ini dalam bentuk yang lebih mudah dipahami, kita menggunakan metrik dan mengajukan

$$p^\mu = \rho v^\mu \surd, \tag{27.7}$$

dimana ρ adalah skalar yang menentukan kerapatan dan v^μ adalah vektor terdahulu u^μ dinormalisasi memiliki panjang 1. Kita memperoleh

$$\begin{aligned} I_m &= -\int \rho\surd v^0 dx^1 dx^2 dx^3 ds \\ &= -\int \rho\surd d^4x, \end{aligned}$$

karena $v^0 ds = dx^0$.

Untuk aksi bentuk ini tidak sesuai bagi penerapan variasi, karena ρ, v^μ bukanlah variabel tak gayut. Kita harus mengeliminasi mereka dalam suku-suku p^μ, yang kemudian divariasi dalam bersesuaian dengan (27.4). Kita memperoleh dari (27.7)

$$(p^\mu p_\mu)^{1/2} = \rho \surd.$$

Sehingga (27.8) menjadi

$$I_m = -\int (p^\mu p_\mu)^{1/2} d^4x. \tag{27.8}$$

Untuk memvariasi pernyataan ini kita menggunakan

$$\begin{aligned} \delta(p^\mu p_\mu)^{1/2} &= \frac{1}{2}(p^\lambda p_\lambda)^{-1/2}(p^\mu p^\nu \delta g_{\mu\nu} + 2p_\mu \delta p^\mu) \\ &= \frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu \surd\ \delta g_{\mu\nu} + v_\mu \delta p^\mu. \end{aligned}$$

Prinsip aksi (27.1) sekarang menghasilkan, dengan bantuan (26.11), yang kita kalikan dengan koefisien κ,

$$\delta(I_g + I_m) = -\int [\kappa(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) + \frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu]\surd\ \delta g_{\mu\nu} d^4x - \int v_\mu\ \delta p^\mu d^4x. \tag{27.9}$$

Menyamakan koefisien $\delta g_{\mu\nu}$, menuju nol, kita memperoleh persamaan Einstein (25.7), asalkan kita mengambil $\kappa = (16\pi)^{-1}$. Suku terakhir menghasilkan, dengan (27.4)

$$\begin{aligned} -\int v_\mu (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu} d^4x &= \int v_{\mu,\nu}(p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu) d^4x \\ &= \int (v_{\mu,\nu} - v_{\nu,\mu} p^\nu b^\mu d^4x \\ &= \int (v_{\mu:\nu} - v_{\nu:\mu})\rho v^\nu b^\mu \surd\ d^4x \\ &= \int v_{\mu:\nu}\rho v^\nu b^\mu \surd\ d^4x \end{aligned} \tag{27.10}$$

dari persamaan (25.2). Dengan menyamakan koefisien b^μ menuju nol, kita memperoleh persamaan geodesik (25.5).

Bab 28

Aksi Medan Elektromagnetik

Pernyataan lazim untuk rapat aksi medan elektromagnetik adalah

$$(8\pi)^{-1}(E^2 - H^2).$$

Jika kita menuliskannya dalam notasi relativitas khusus empat-dimensi yang diberikan dalam Bab 23, pernyataan di atas menjadi

$$-(16\pi)^{-1}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Ini menuju ke pernyataan

$$I_{em} = -(16\pi)^{-1}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\surd\, d^4x \tag{28.1}$$

untuk aksi invarian dalam relativitas umum. Di sini kita harus mengambil dalam perhitungan bahwa $F_{\mu\nu} = \kappa_{\mu,\nu} - \kappa_{\nu,\mu}$, sehingga I_{em} adalah fungsi dari $g_{\mu\nu}$ dan turunan potensial elektromagnetik.

Misalkan kita mengubah $g_{\mu\nu}$, dengan mempertahankan κ_σ konstan, sehingga $F_{\mu\nu}$ konstan tetapi $F^{\mu\nu}$ tidak konstan. Kita memiliki

$$\begin{aligned}
\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\surd) &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\delta\surd + F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\surd\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}) \\
&= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\surd\,\delta g_{\rho\sigma} - 2F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\surd g^{\mu\rho}g^{\alpha\sigma}g^{\nu\beta}\delta g_{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

dengan bantuan (26.10) dan (26.9). Jadi

$$\begin{aligned}
\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\surd) &= \left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - 2F^{\rho}{}_{\nu}F^{\sigma\nu}\right)\surd\,\delta g_{\rho\sigma} \\
&= 8\pi E^{\rho\sigma}\surd\,\delta g_{\rho\sigma},
\end{aligned} \tag{28.2}$$

dimana $E^{\rho\sigma}$ adalah tensor stress-energi medan elektromagnetik, tensor simetri didefinisikan oleh

$$4\pi E^{\rho\sigma} = -F^{\rho}{}_{\nu}F^{\sigma\nu} + \frac{1}{4}g^{\rho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{28.3}$$

Catat bahwa dalam relativitas khusus

$$\begin{aligned} 4\pi E^{00} &= E^2 - \frac{1}{2}(E^2 - H^2) \\ &= \frac{1}{2}(E^2 + H^2), \end{aligned}$$

sehingga E^{00} adalah rapat energi, dan

$$\begin{aligned} 4\pi E^{01} &= -F^{0}{}_{2}F^{12} - F^{0}{}_{3}F^{13} \\ &= E^2H^3 - E^3H^2, \end{aligned}$$

sehingga E^{0n} adalah vektor Poynting yang memberikan laju aliran energi.

Jika kita mengubah κ_μ, dengan mempertahankan $g_{\alpha\beta}$ tetap, kita memperoleh

$$\begin{aligned} \delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\surd) &= 2F^{\mu\nu}\surd\,\delta F_{\mu\nu} \\ &= 4F^{\mu\nu}\surd\,\delta\kappa_{\mu,\nu} \\ &= 4(F^{\mu\nu}\surd\,\delta\kappa_\mu)_{,\nu} - 4(F^{\mu\nu}\surd)_{,\nu}\delta\kappa_\mu \\ &= 4(F^{\mu\nu}\surd\,\delta\kappa_\mu)_{,\nu} - 4F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\surd\,\delta\kappa_\mu \end{aligned} \tag{28.4}$$

dengan bantuan (21.3).

Penambahan (28.2 dan (28.4) dan pembagian dengan -16π, kita memperoleh untuk variasi total

$$\delta I_{em} = \int \left[-\frac{1}{2}E^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + (4\pi)^{-1}F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\delta\kappa_\mu\right]\surd\, d^4x. \tag{28.5}$$

Bab 29

Aksi Materi Bermuatan

Dalam bab sebelumnya kita meninjau medan elektromagnetik dalam ketiadaan muatan. Jika terdapat muatan, suku lebih lanjut diperlukan dalam aksi. Untuk partikel tunggal bermuatan e, aksi ekstra adalah

$$-e \int \kappa_\mu dx^\mu = -e \int \kappa_\mu v^\mu ds, \tag{29.1}$$

diintegrasikan sepanjang garis dunia.

Terdapat kesulitan-kesulitan berurusan dengan sebuah partikel titik yang membawa muatan karena ia menghasilkan singularitas dalam medan listrik. Kita dapat menghindari kesulitan ini dengan mengurusi sebagai ganti, distribusi kontinu materi pembawa muatan. Kita akan menangani materi ini dengan teknik dari Bab 27, asumsikan tiap-tiap elemen materi membawa muatan.

Dalam pembahasan kinematika kita memiliki rapat vektor kontravarian p^μ untuk menentukan rapat dan aliran materi. Sekarang kita harus memperkenalkan rapat vektor kontravarian $\mathcal{J}^\mu$ untuk menentukan rapat dan aliran kelistrikan. Dua vektor dikendala untuk berada dalam arah yang sama. Ketika kita melakukan pergeseran, kita memiliki

$$\delta \mathcal{J}^\mu = (\mathcal{J}^\nu b^\mu - \mathcal{J}^\mu b^\nu)_{,\nu} \tag{29.2}$$

berhubungan dengan (27.4), dengan b^μ yang sama.

Pernyataan (29.1) untuk aksi partikel bermuatan sekarang menuju

$$I_q = -\int \mathcal{J}^0 \kappa_\mu v^\mu \; dx^1 \; dx^2 \; dx^3 \; ds$$

untuk distribusi kontinu materi bermuatan, terkait dengan (27.6).

Ketika kita memperkenalkan metrik kita mengajukan, terkait dengan (27.7),

$$\mathcal{J}^\mu = \sigma v^\mu \surd, \tag{29.3}$$

dimana σ adalah skalar yang menentukan rapat muatan. Aksi menjadi, terkait dengan (27.8)

$$\begin{aligned} I_q &= -\int \sigma \kappa_\mu v^\mu \surd \; d^4x \\ &= -\int \kappa_\mu \mathcal{J}^\mu \; d^4x. \end{aligned} \tag{29.4}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \delta I_q &= -\int [\mathcal{J}^\mu \delta\kappa_\mu + \kappa_\mu(\mathcal{J}^\nu b^\mu - \mathcal{J}^\mu b^\nu)_{,\nu}] \, d^4x \\ &= \int [-\sigma v^\mu \surd \; \delta\kappa_\mu + \kappa_{\mu,\nu}(\mathcal{J}^\nu b^\mu - \mathcal{J}^\mu b^\nu)] \, d^4x \\ &= \int \sigma(-v^\mu \delta\kappa_\mu + F_{\mu\nu} v^\nu b^\mu) \surd \; d^4x. \end{aligned} \tag{29.5}$$

Persamaan interaksi materi bermuatan dengan kombinasi medan gravitasi dan medan elektromagnetik seluruhnya mengikuti prinsip aksi umum

$$\delta(I_g + I_m + I_{em} + I_q) = 0. \tag{29.6}$$

Jadi, kita mengambil penjumlahan dari pernyataan (29.5), (28.5), dan (27.9) dengan suku terakhir diganti oleh (27.10), dan menyamakan koefisien variasi total $\delta g_{\mu\nu}, \delta\kappa_\mu$, dan b^μ menuju nol.

Koefisien $\surd\delta g_{\mu\nu}$, dikalikan dengan -16π, memberikan

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + 8\pi\rho v^\mu v^\nu + 8\pi E^{\mu\nu} = 0. \tag{29.7}$$

Ini adalah persamaan Einstein (24.6) dengan $Y^{\mu\nu}$ terdiri dari dua bagian, satu bagian berasal dari tensor energi-materi dan yang lain dari tensor stress-energi medan elektromagnetik.

Koefisien $\sqrt{\ }\delta\kappa_\mu$ memberi

$$-\sigma v^\mu + (4\pi)^{-1} F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0.$$

Dari (29.3) kita melihat bahwa σv^μ adalah vektor arus muatan J^μ, sehingga kita memperoleh

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^\mu. \tag{29.8}$$

Ini adalah persamaan Maxwell (23.13) untuk kehadiran muatan.

Akhirnya, koefisien $\sqrt{} b^\mu$ memberi

$$\rho v_{\mu:\nu} v^\nu + \sigma F_{\mu\nu} v^\nu = 0,$$

atau

$$\rho v_{\mu:\nu} v^\nu + F_{\mu\nu} J^\nu = 0. \tag{29.9}$$

Di sini suku kedua memberikan gaya Lorentz yang menyebabkan lintasan elemen materi terpisah dari geodesik.

Persamaan (29.9) dapat dideduksi dari (29.7) dan (29.8). Ambil divergensi kovarian (29.7) dan gunakan relasi Bianci, kita peroleh

$$(\rho v^\mu v^\nu + E^{\mu\nu})_{:\nu} = 0. \tag{29.10}$$

Sekarang dari (28.3)

$$\begin{aligned} 4\pi E^{\mu\nu}{}_{:\nu} &= -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_{\alpha:\nu} - F^{\mu\alpha}{}_{:\nu} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta:\nu} \\ &= -F^{\mu\alpha} F^\nu_{\alpha:\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} (F_{\rho\sigma:\nu} - F_{\rho\nu:\sigma} - F_{\nu\sigma:\rho}) \\ &= 4\pi F^{\mu\alpha} J_\alpha, \end{aligned}$$

dari (23.12) dan (29.8). Sehingga (29.10) menjadi

$$v^\mu (\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu} + F^{\mu\alpha} J_\alpha = 0. \tag{29.11}$$

Kalikan dengan v_μ dan gunakan (25.2). Kita peroleh

$$(\rho v^\nu)_{:\nu} = -F^{\mu\alpha} v_\mu J_\alpha = 0 \tag{29.12}$$

jika kita gunakan syarat $J_\alpha = \sigma v_\alpha$, menyatakan bahwa J_α dan v_α dikendala berada dalam arah yang sama. Jadi, suku pertama (29.11) lenyap dan kita ditinggali dengan (29.9).

Deduksi ini berarti, persamaan yang mematuhi prinsip aksi (29.6) tidaklah seluruhnya tak gayut. Terdapat alasan umum bagi hal ini, yang akan dijelaskan dalam Bab 30.

Bab 30

Prinsip Aksi Komprehensif

Metode dalam Bab 29 dapat digeneralisasi untuk diterapkan bagi medan gravitasi yang berinteraksi dengan sembarang medan lain, yang juga berinteraksi satu sama lain. Terdapat prinsip aksi komprehensif,

$$\delta(I_g + I') = 0, \tag{30.1}$$

dimana I_g adalah aksi gravitasi yang kita miliki sebelumnya dan I' adalah aksi seluruh medan lain dan terdiri dari penjumlahan suku-suku, satu suku untuk tiap-tiap medan. Ini adalah keuntungan besar penggunaan prinsip aksi yang begitu mudah untuk memperoleh persamaan yang benar untuk sembarang medan dalam interaksi. Kita hanya harus memperoleh aksi untuk tiap-tiap medan dan menambahkan mereka semuanya bersamaan dan mencangkup mereka keseluruhan dalam (30.1).

Kita memiliki

$$I_g = \int \mathcal{L}\ d^4x,$$

dimana $\mathcal{L}$ ini adalah $(16\pi)^{-1}$ kali $\mathcal{L}$ dari Bab 26. Kita memperoleh

$$\begin{aligned}\delta I_g &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \delta g_{\alpha\beta,\nu} \right) d^4x \\ &= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} \right] \delta g_{\alpha\beta}\ d^4x.\end{aligned}$$

Pekerjaan Bab 26, menuju ke (26.11), menunjukkan bahwa

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} \right)_{,\nu} = -(16\pi)^{-1}(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R)\surd. \tag{30.2}$$

Misalkan $\phi_n (n = 1, 2, 3, ...)$ menyatakan kuantitas medan lain. Masing-masing dari kuantitas medan tersebut diasumsikan menjadi komponen tensor, tetapi sifat tensor yang tepat tidak ditentukan. I' adalah bentuk integral rapat skalar

$$I' = \int \mathcal{L}' \, d^4x,$$

dimana $\mathcal{L}'$ adalah fungsi dari ϕ_n dan turunan pertamanya $\phi_{n,\mu}$ dan mungkin juga turunan yang lebih tinggi.

Sekarang variasi aksi menuju hasil berbentuk

$$\delta(I_g + I') = \int (p^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \Sigma_n \chi^n \delta\phi_n) \surd \, d^4x, \tag{30.3}$$

dengan $p^{\mu\nu} = p^{\nu\mu}$, karena sembarang suku yang melibatkan δ (turunan kuantitas medan) dapat ditransformasi oleh integrasi parsial menuju suku yang dapat dicangkup dalam (30.3). Prinsip variasi (30.1) menuju persamaan medan

$$p^{\mu\nu} = 0, \tag{30.4}$$

$$\chi^n = 0. \tag{30.5}$$

$p^{\mu\nu}$ akan terdiri dari suku (30.2) yang berasal dari I_g plus suku dari $\mathcal{L}'$, katakanlah $N^{\mu\nu}$. Kita memiliki tentunya $N^{\mu\nu} = N^{\nu\mu}$. $\mathcal{L}'$ biasanya tak mengandung turunan $g_{\mu\nu}$ dan kemudian

$$N^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{30.6}$$

Persamaan (30.4) sekarang menjadi

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - 16\pi N^{\mu\nu} = 0.$$

Ini adalah persamaan Einstein (24.6) dengan

$$Y^{\mu\nu} = -2N^{\mu\nu}. \tag{30.7}$$

Kita melihat di sini bagaimana masing-masing medan mengkontribusi sebuah suku ke sisi kanan persamaan Einstein, bergantung, menurut (30.6), pada cara aksi medan melibatkan $g_{\mu\nu}$.

Adalah perlu untuk konsistensi, $N^{\mu\nu}$ memiliki sifat $N^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$. Sifat ini dapat dideduksi pada umumnya dari syarat I' invarian dalam perubahan koordinat yang membiarkan permukaan batas tak berubah. Kita melakukan perubahan kecil koordinat, katakanlah $x^{\mu'} = x^\mu + b^\mu$, dengan b^μ kecil dan fungsi-fungsi x, dan bekerja untuk orde pertama dalam b^μ. Hukum transformasi $g_{\mu\nu}$ menurut (3.7), dengan sufiks apostrof mencirikan tensor baru,

$$g_{\mu\nu}(x) = x^{\alpha'}_{,\mu} x^{\beta'}_{,\nu} g_{\alpha'\beta'}(x'). \tag{30.8}$$

Misalkan $\delta g_{\alpha\beta}$ menyatakan perubahan orde pertama dalam $g_{\alpha\beta}$, bukan pada titik medan khusus, tetapi untuk nilai koordinat tertentu yang dirujuk, sehingga

$$\begin{aligned} g_{\alpha'\beta'}(x') &= g_{\alpha\beta}(x') + \delta g_{\alpha\beta} \\ &= g_{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\beta,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Kita memiliki

$$x^{\alpha'}_{,\mu} = (x^\alpha + b^\alpha)_{,\mu} = g^\alpha_\mu + b^\alpha_{,\mu}.$$

Jadi (30.8) menghasilkan

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= (g^\alpha_\mu + b^\alpha_{,\mu})(g^\beta_\nu + b^\beta_{,\nu})[g_{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\beta,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\alpha\beta}] \\ &= g_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\beta} b^\beta_{,\nu} + g_{\alpha\nu} b^\alpha_{,\mu}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} b^\alpha_{,\nu} - g_{\nu\alpha} b^\alpha_{,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma.$$

Kita sekarang menentukan variasi I' ketika $g_{\mu\nu}$ diubah dalam cara ini dan variabel medan lain mempertahankan nilai yang sama pada titik dengan koordinat $x^{\mu'}$ yang sebelumnya mereka miliki untuk x^μ. Hal ini, jika kita gunakan (30.6),

$$\begin{aligned} \delta I' &= \int N^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \surd \; d^4x \\ &= \int N^{\mu\nu}(-g_{\mu\alpha} b^\alpha_{,\nu} - g_{\nu\alpha} b^\alpha_{,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma) \surd \; d^4x \\ &= \int [2(N_\alpha{}^\nu \surd)_{,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha} N^{\mu\nu} \surd] b^\alpha \; d^4x \\ &= 2\int N_\alpha{}^\nu{}_{:\nu} b^\alpha \surd \; d^4x \end{aligned}$$

dari teorema yang dinyatakan oleh (21.4), valid untuk sembarang tensor dua indeks simetri. Sifat invarian I' menghendaki bahwa ini tak berubah dalam variasi, untuk seluruh b^α. Oleh karena itu $N_\alpha{}^\nu{}_{:\nu} = 0$.

Pada perhitungan relasi ini, persamaan medan (30.4),(30.5) tidaklah seluruhnya tak gayut.

Bab 31

Tensor Pseudo-Energi Medan Gravitasi

Definisikan kuantitas $t_\mu{}^\nu$ dengan

$$t_\mu{}^\nu \surd = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu} - g_\mu^\nu \mathcal{L}. \tag{31.1}$$

Kita kemudian memiliki

$$(t_\mu{}^\nu \surd)_{,\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu} g_{\alpha\beta,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu\nu} - \mathcal{L}_{,\mu}.$$

Sekarang

$$\mathcal{L}_{,\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\nu\mu},$$

sehingga

$$\begin{aligned}
(t_\mu{}^\nu \surd)_{,\nu} &= \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\beta}}\right] g_{\alpha\beta,\mu} \\
&= (16\pi)^{-1}(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R) g_{\alpha\beta,\mu} \surd
\end{aligned}$$

dari (30.2). Dengan bantuan persamaan medan (24.6) sekarang kita peroleh

$$(t_\mu{}^\nu \surd)_{,\nu} = -\frac{1}{2} Y^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \surd,$$

sehingga dari (21.4) dan $Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu} = 0$, kita peroleh

$$\left[\left(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu\right)\surd\right]_{,\nu} = 0. \tag{31.2}$$

Kita memiliki di sini hukum kekekalan, dan adalah alami untuk meninjau rapat kekekalan $(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu)\sqrt{\ }$ sebagai rapat energi dan momentum. Kita memiliki $Y_\mu{}^\nu$ sebagai energi dan momentum medan selain medan gravitasi, sehingga $t_\mu{}^\nu$ mewakili energi dan momentum medan gravitasi. Tetapi *ini bukan tensor*. Persamaan (31.1) yang mendefinisikannya dapat ditulis

$$t_\mu{}^\nu = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu} - g_\mu^\nu L; \tag{31.3}$$

tetapi L bukan skalar, karena kita harus mentransformasi skalar R, yang pada mulanya digunakan untuk memperoleh aksi gravitasi, untuk memindahkan turunan kedua darinya. Jadi $t_\mu{}^\nu$ tak dapat menjadi tensor. Ini disebut pseudo-tensor.

Tidaklah mungkin memperoleh pernyataan energi medan gravitasi yang memenuhi kedua syarat: (i) ketika ditambahkan ke energi bentuk lain energi total adalah kekal, dan (ii) energi dalam daerah (tiga dimensi) tertentu pada waktu tertentu tak gayut sistem koordinat. Jadi, secara umum, energi gravitasi tak dapat dilokalisasi. Yang terbaik yang dapat kita lakukan adalah menggunakan pseudo-tensor, yang memenuhi syarat (i) tetapi tidak memenuhi syarat (ii). Ini memberi kita informasi aproksimasi tentang energi gravitasi, yang dalam kasus khusus dapat menjadi akurat.

Kita dapat membentuk integral

$$\int (t_\mu{}^0 + Y_\mu{}^0)\sqrt{\ }\ dx^1\ dx^2\ dx^3 \tag{31.4}$$

meliputi volume besar tiga dimensi dengan memasukkan sistem fisis pada waktu tertentu. Sebagaimana volume menuju tak hingga, kita dapat menganggap integral untuk memberi energi dan momentum total, asalkan: (a) ini konvergen dan (b) fluks melalui permukaan volume besar menuju nol. Persamaan (31.2) kemudian menunjukkan, integral (31.4) diambil pada satu waktu $x^0 = a$ sama dengan nilainya pada waktu lain $x^0 = b$. Lebih jauh, integral harus tak gayut sistem koordinat, karena kita dapat mengubah koordinat pada $x^0 = b$ tanpa mengubah mereka pada $x^0 = a$. Kita jadinya memiliki pernyataan tertentu untuk energi dan momentum total, yang kekal.

Syarat (a) dan (b), yang diperlukan untuk kekekalan energi dan momentum total, tidaklah sering terterapkan dalam kasus praktis. Mereka akan berlaku jika ruang adalah statik di luar daerah tubular tertentu dalam empat dimensi. Ini dapat menjadi demikian, jika kita memiliki sedikit massa yang mulai bergerak pada waktu tertentu, sehingga gerak menimbulkan gangguan yang menjalar keluar dengan kecepatan cahaya. Untuk sistem planet biasa gerak akan terjadi karena masa lalu tak hingga dan syarat tidak berlaku. Perlakuan khusus diperlukan untuk membahas energi gelombang gravitasi, dan ini akan diberikan dalam Bab 33.

Bab 32

Pernyataan Eksplisit Pseudo-Tensor

Formula (31.1) untuk mendefinisikan $t_\mu{}^\nu$ adalah dari bentuk

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{n,\nu}} q_{n,\mu} - g_\mu^\nu \mathcal{L}, \tag{32.1}$$

dimana $q_n(n = 1, 2, ..., 10)$ adalah sepuluh $g_{\mu\nu}$ dan penjumlahan meliputi seluruh n tersirat. Kita dapat sama baik menuliskannya

$$t_\mu{}^\nu\sqrt{} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} Q_{m,\mu} - g_\mu^\nu \mathcal{L}, \tag{32.2}$$

dimana Q_m adalah sembarang sepuluh fungsi tak gayut dari q_n. Untuk membuktikan ini, catat bahwa

$$Q_{m,\sigma} = \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} q_{n,\sigma}$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{n,\nu}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{m,\sigma}} \frac{\partial Q_{m,\sigma}}{\partial q_{n,\nu}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{m,\sigma}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} g_\sigma^\nu \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n}. \end{aligned}$$

Jadi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{n,\nu}} q_{n,\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} q_{n,\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{m,\nu}} Q_{m,\mu}.$$

Persamaan (32.1) dan (32.2) mengikuti.

Untuk mendeduksi pernyataan eksplisit $t_\mu{}^\nu$ adalah tepat untuk bekerja dengan (32.2) dan mengambil Q_m menjadi kuantitas $g^{\mu\nu}\sqrt{}$. Kita dapat sekarang menggunakan formula (26.7), yang memberi (terbawa dalam koefisien 16π),

$$16\pi\delta\mathcal{L} = (\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - g^{\nu}_{\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma})\delta(g^{\alpha\beta}\surd)_{,\nu} + (\text{beberapa koefisien})\delta(g^{\mu\nu}\surd),$$

dan oleh karena itu

$$16\pi t_{\mu}{}^{\nu}\surd = (\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - g^{\nu}_{\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma})(g^{\alpha\beta}\surd)_{,\mu} - g^{\nu}_{\mu}\mathcal{L}. \tag{32.3}$$

Bab 33

Gelombang Gravitasi

Marilah kita tinjau daerah ruang kosong dimana medan gravitasi lemah dan $g_{\mu\nu}$ secara aproksimasi konstan. Kita kemudian memiliki persamaan (16.4) atau

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) = 0. \tag{33.1}$$

Misalkan kita mengambil koordinat harmonik. Syarat (22.2) memberi, dengan sufiks λ diturunkan,

$$g^{\mu\nu}(g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho}) = 0. \tag{33.2}$$

Diferensiasikan persamaan ini berkaitan dengan x^σ dan abaikan suku orde kedua. Hasilnya adalah

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\rho,\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0. \tag{33.3}$$

Pertukarkan ρ dan σ:

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0. \tag{33.4}$$

Tambahkan (33.1),(33.3), dan (33.4). Kita memperoleh

$$g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0.$$

Jadi tiap-tiap $g_{\rho\sigma}$ memenuhi persamaan d'Alembert dan solusinya akan terdiri dari gelombang menjalar dengan kecepatan cahaya. Mereka adalah gelombang gravitasi.

Marilah kita tinjau energi gelombang ini. Dikarenakan pseudo-tensor bukan tensor real, kita tidak memperoleh, secara umum, hasil yang jelas tak gayut sistem koordinat. Tetapi terdapat satu kasus khusus dimana kita memperoleh hasil yang jelas; katakanlah, ketika gelombang keseluruhan bergerak dalam arah yang sama.

Jika gelombang keseluruhan bergerak dalam arah x^3, kita dapat memilih sistem koordinat kita sehingga $g_{\mu\nu}$ adalah fungsi dari hanya satu variabel $x^0 - x^3$. Misalkan kita mengambil kasus yang lebih umum dimana $g_{\mu\nu}$ adalah seluruhnya fungsi dari variabel tunggal $l_\sigma x^\sigma$, l_σ menjadi konstanta yang memenuhi $g^{\rho\sigma} l_\rho l_\sigma = 0$, dengan mengabaikan bagian variabel $g^{\rho\sigma}$. Kita kemudian memiliki

$$g_{\mu\nu,\sigma} = u_{\mu\nu} l_\sigma, \tag{33.5}$$

dimana $u_{\mu\nu}$ adalah turunan fungsi $g_{\mu\nu}$ dari $l_\sigma x^\sigma$. Tentunya, $u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}$. Syarat harmonik (33.2) memberi

$$g^{\mu\nu} u_{\mu\rho} l_\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} u_{\mu\nu} l_\rho = \frac{1}{2} u l_\rho,$$

dengan $u = u^\mu_\mu$. Kita dapat menulis ini sebagai

$$u^\nu_\rho l_\nu = \frac{1}{2} u l_\rho \tag{33.6}$$

atau sebagai

$$(u^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} u) l_\nu = 0. \tag{33.7}$$

Kita memiliki dari (33.5)

$$\Gamma^\rho_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}(u^\rho_\mu l_\sigma + u^\rho_\sigma l_\mu - u_{\mu\sigma} l^\rho).$$

Pernyataan (26.3) untuk L mereduksi, dengan koordinat harmonik, menjadi

$$\begin{aligned} L &= -g^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \\ &= -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} (u^\rho_\mu l_\sigma + u^\rho_\sigma l_\mu - u_{\mu\sigma} l^\rho)(u^\sigma_\nu l_\rho + u^\sigma_\rho l_\nu - u_{\nu\rho} l^\sigma). \end{aligned}$$

Ini memberi sembilan suku ketika dikalikan, tetapi kita dapat dengan mudah melihat bahwa setiap satu dari mereka hilang, pada perhitungan (33.6) dan $l_\sigma l^\sigma = 0$. Jadi rapat aksi lenyap. Terdapat hasil berkaitan untuk medan elektromagnetik, dimana rapat aksi juga lenyap dalam hal gelombang bergerak hanya dalam satu arah.

Sekarang kita harus mengevaluasi pseudo-tensor (32.3). Kita memiliki

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} &= -g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g_{\rho\sigma,\mu} = -u^{\alpha\beta}l_\mu, \\ \surd_{,\mu} &= \frac{1}{2}\surd g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu} = \frac{1}{2}\surd u l_\mu, \end{aligned} \tag{33.8}$$

sehingga

$$(g^{\alpha\beta}\surd)_{,\mu} = -(u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u)\surd l_\mu.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}(g^{\alpha\beta}\surd)_{,\mu} &= \surd_{,\alpha}(-u^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u)l_\mu \\ &= 0, \end{aligned}$$

dari (33.8) dan (33.7). Kita ditinggali dengan

$$\begin{aligned} 16\pi t_\mu{}^\nu &= -\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u)l_\mu \\ &= -\frac{1}{2}(u^\nu_\alpha l_\beta + u^\nu_\beta l_\alpha - u_{\alpha\beta}l^\nu)(u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u)l_\mu \\ &= \frac{1}{2}(u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}u^2)l_\mu l^\nu. \end{aligned} \tag{33.9}$$

Kita memiliki hasil untuk $t_\mu{}^\nu$ yang nampak seperti tensor. Ini berarti, $t_\mu{}^\nu$ mentransformasi seperti tensor dalam transformasi demikian yang mempertahankan ciri medan yang terdiri dari hanya gelombang menjalar dalam arah l_σ, sehingga $g_{\mu\nu}$ fungsi sisa variabel tunggal $l_\sigma x^\sigma$. Transformasi demikian harus terdiri hanya dalam pengantar gelombang koordinat menjalar dalam arah l_σ, berbentuk

$$x^{\mu'} = x^\mu + b^\mu,$$

dimana b_μ hanya fungsi $l_\sigma x^\sigma$. Dengan pembatasan, kita memiliki gelombang menjalar hanya dalam satu arah, energi gravitasi dapat dilokalisasi.

Bab 34

Polarisasi Gelombang Gravitasi

Untuk memahami arti fisis (33.9), marilah kita kembali ke kasus gelombang menjalar dalam arah x^3, sehingga $l_0 = 1, l_1 = l_2 = 0, l_3 = -1$, dan gunakan aproksimasi koordinat menuju relativitas khusus. Syarat harmonik (33.6) memberi

$$\begin{aligned} u_{00} + u_{03} &= \frac{1}{2}u, \\ u_{10} + u_{13} &= 0, \\ u_{20} + u_{23} &= 0, \\ u_{30} + u_{33} &= -\frac{1}{2}u. \end{aligned}$$

Jadi

$$u_{00} - u_{33} = u = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33},$$

sehingga

$$u_{11} + u_{22} = 0. \tag{34.1}$$

Juga

$$2u_{03} = -(u_{00} + u_{33}).$$

Sekarang kita peroleh

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}u^2 &= {u_{00}}^2 + {u_{11}}^2 + {u_{22}}^2 + {u_{33}}^2 - 2{u_{01}}^2 - 2{u_{02}}^2 \\
&\quad -2{u_{03}}^2 + 2{u_{12}}^2 + 2{u_{23}}^2 + 2{u_{31}}^2 - \frac{1}{2}(u_{00} - u_{33})^2 \\
&= {u_{11}}^2 + {u_{22}}^2 + 2{u_{12}}^2 \\
&= \frac{1}{2}(u_{11} - u_{22})^2 + 2u_{12}^2,
\end{aligned}$$

dari (34.1). Jadi

$$16\pi {t_0}^0 = \frac{1}{4}(u_{11} - u_{22})^2 + {u_{12}}^2 \tag{34.2}$$

dan

$${t_0}^3 = {t_0}^0.$$

Kita melihat, rapat energi positip tertentu dan energi mengalir dalam arah x^3 dengan kecepatan cahaya.

Untuk membahas polarisasi gelombang, kita memperkenalkan operator rotasi infinitesimal R dalam bidang x^1x^2. Diterapkan terhadap sembarang vektor A_1, A_2, operasi operator ini memiliki efek

$$RA_1 = A_2, \quad RA_2 = -A_1.$$

Jadi

$$R^2A_1 = -A_1,$$

sehingga iR memiliki nilai eigen ± 1 ketika diterapkan terhadap vektor.

Diterapkan terhadap $u_{\alpha\beta}$, ini memiliki efek

$$\begin{aligned}
Ru_{11} &= u_{21} + u_{12} = 2u_{12}, \\
Ru_{12} &= u_{22} - u_{11}, \\
Ru_{22} &= -u_{12} - u_{21} = -2u_{12}.
\end{aligned}$$

Sehingga

$$R(u_{11} + u_{22}) = 0$$

dan

$$R(u_{11} - u_{22}) = 4u_{12}$$
$$R^2(u_{11} - u_{22}) = -4(u_{11} - u_{22}).$$

Jadi $u_{11} + u_{22}$ adalah invarian, sementara iR memiliki nilai eigen ± 2 ketika diterapkan terhadap $u_{11} - u_{22}$ atau u_{12}. Komponen dari $u_{\alpha\beta}$ yang mengkontribusi energi (34.2) berhubungan dengan spin 2.

Bab 35

Suku Kosmologi

Einstein telah meninjau bentuk umum persamaan medannya untuk ruang kosong

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \tag{35.1}$$

dimana λ adalah konstanta. Ini adalah persamaan tensor, sehingga persamaan tersebut diperkenankan sebagai hukum alam.

Kita memperoleh kesesuaian yang bagus dengan pengamatan sistem matahari tanpa suku ini, dan oleh karena itu jika kita memperkenalkannya kita harus mengambil λ cukup kecil sehingga tak menganggu kesesuaian. Karena $R_{\mu\nu}$ mengandung turunan kedua dari $g_{\mu\nu}$, λ harus memiliki dimensi (jarak)$^{-2}$. Untuk λ kecil jarak ini harus sangat besar. Ini adalah jarak kosmologi, berorde jari-jari alam semesta.

Suku ekstra adalah penting untuk teori kosmologi, tetapi memiliki efek fisis yang dapat diabaikan dari objek-objek berdekatan. Untuk mengambil ini dalam perhitungan teori medan, kita hanya harus menambahkan suku ekstra terhadap Lagrangian; katakanlah,

$$I_c = c \int \sqrt{} d^4x,$$

dengan c konstanta yang sesuai.

Kita memiliki dari (26.10)

$$\delta I_c = c \int \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{} d^4x.$$

Jadi prinsip aksi

$$\delta(I_g + I_c) = 0$$

memberi

$$16\pi(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) + \frac{1}{2}cg^{\mu\nu} = 0. \tag{35.2}$$

Persamaan (35.1) memberi

$$R = 4\lambda.$$

dan oleh karena itu

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\lambda g_{\mu\nu}.$$

Ini bersesuaian dengan (35.2), asalkan kita mengambil

$$c = 32\pi\lambda.$$

Untuk medan gravitasi yang berinteraksi dengan sembarang medan lain, kita hanya harus mencangkup suku I_c dalam aksi dan kita akan memperoleh persamaan medan yang benar dengan suku kosmologi Einstein.

Bab 36

Indeks